LES PROTOTYPES PASSE BAS

Nous nous limiterons aux filtres polynomiaux c'est à dire ceux dont le numérateur de la fonction de transfert est une constante.

La propriété qui sera considérée est le comportement du gain dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Si l'on veut par exemple placer un filtre à l'entrée d'un appareil de mesure tel un voltmètre , (de toute façon l'amplificateur interne de ce voltmètre ou même son galvanomètre à cadre mobile se comportent comme des filtres passe bas.) son gain doit être aussi constant que possible dans la bande passante de façon que l'amplitude d'une tension mesurée ne soit pas entachée d'une erreur due à la fréquence. Une première catégorie de filtres satisfait à ces conditions, leur gain, maximum pour la fréquence nulle, est le plus constant possible dans la bande passante. Ils obéissent au **critère du méplat** (en anglais maximaly flat).Mathématiquement la courbe de gain présente un maximum de dérivées nulles pour f=0.**Ce sont les filtres de Butterworth** .

Lorsque le signal utile à une fréquence constante mais se trouve mélangé avec des signaux parasites de fréquences plus élevées, la constance du gain dans la bande passante n'est plus le critère fondamental, par contre au delà de la fréquence de coupure le gain doit descendre le plus vite possible pour atténuer au mieux les termes nuisibles**. Les filtres de Tchebytchev** ont un gain qui peut varier de Δ dB dans la bande passante mais , au delà de la fréquence de coupure , chute beaucoup plus vite que dans le cas précédent.

On a vu que la condition de non distorsion était une variation linéaire de la phase en fonction de la fréquence. C'est un filtre dont l'évolution de la phase possède cette propriété qu'il faudrait placer à l'entrée d'un oscilloscope dont le rôle est de visualiser les signaux**. Les filtres de Bessel** possèdent pour un degré donné une phase la plus linéaire possible, mais cette qualité se fait au détriment de la vitesse de chute du gain au delà de la fréquence de coupure.

CRITERE DU MEPLAT FILTRES DE BUTTERWORTH

On impose que $X(\omega) = \left|H(j2\pi f)\right|^2$ ait pour ω=0 le maximum de dérivées nulles.

Remarquons d'abord que si les dérivées de l'atténuation A=1/X sont nulles celles de X le sont aussi .

En effet la dérivée de 1/X est -X'/X² , pour f=0 X(0)=1 gain en continu , pour que la dérivée soit nulle il faut que X' le soit.

De même la dérivée seconde -(X''X²-2XX'²)/X⁴ ne peut être nulle à l'origine que si X' et X'' le sont , et ainsi de suite.

Nous considérerons donc l'atténuation $1/|H|^2$ .La fonction de transfert du filtre polynomial de degré n est de la forme : $H(p) = \dfrac{1}{a_n p^n + ... + a_0}$

Donc l'inverse de son module au carré : $A(f) = A_{2n} f^{2n} + A_{2n-2} f^{2n-2} + ... + A_2 f^2 + A_0$

Posons g = f² $A(g) = A_{2n} g^n + A_{2n-2} g^{n-1} + ... + A_2 g + A_0$

Si les dérivées à l'origine de A par rapport à g sont nulles celles de A par rapport à f le sont aussi.

$\dfrac{dA}{dg} = \dfrac{dA}{df}\dfrac{df}{dg} = \dfrac{dA}{df}\dfrac{1}{2f}$ *ne peut être nul pour f=0 que si da/df l'est et ainsi de suite aux ordres plus élevés.*

Ecrivons que toutes les dérivées de A sont nulles :

. $$\left(\frac{dA}{dg}\right)_0 = A_2 = 0$$

au second ordre:

$$\left(\frac{d^2A}{dg^2}\right)_0 = A_4 = 0$$

etc , finalement tous les coefficients doivent être nuls sauf A_0 et A_{2N} D'ou l'expression de la fonction de transfert maximaly flat : $\left|H(f)\right|^2 = \dfrac{K}{A_{2n}f^{2n} + A_0}$ qui peut se mettre sous la forme:

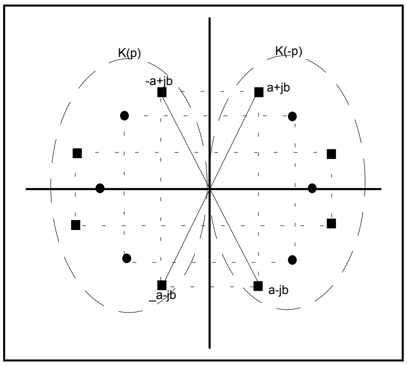
$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{K}{\omega^{2n} + \omega_0^{2n}}$$ ou en normalisant ω_0=1 : $$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{K}{\omega^{2n} + 1}$$

ou en p puisque p=jω donc $p^2 = -\omega^2$ $\left|H(p)\right|^2 = \dfrac{K}{(-1)^n p^{2n} + 1}$

Mais il ne s'agit que du carré du module de la fonction de transfert.

Reconstruction d'une fonction de transfert à partir de son module.

Soit $F(p^2)=|H(j2\pi f)|^2$



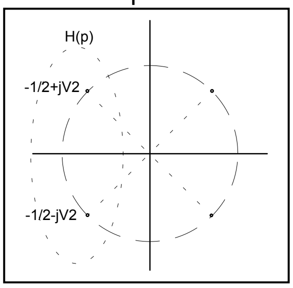
La fonction de transfert étant celle d'un système réel, ses coefficients sont réels et le carré de son module étant pair |H(p)|=|H(-p)|

F(p2) ne contient que les puissances paires de p.

Soit a+jb un pôle ou zéro de F(p2) , ses coefficient étant réel -a+jb l'est aussi. Mais la fonction étant paire -a-jb et +a-jb le sont également .Les pôles et zéros se groupent par 4 (sauf ceux qui sont sur l'un des axes), on parle de **répartition quadrantale.**

Formons alors une fraction rationnelle K(p) en regroupant les pôles et zéros de $F(p^2)$ qui se trouvent à gauche de l'axe imaginaire., K(-p) est évidemment obtenu en regroupant les pôles et zéros situés à droite. Or $K(p).K(-p)=F(p^2)$, K est une fonction de transfert stable et à déphasage minimal qui satisfait aux conditions.

Appliquons cette méthode aux filtres maximaly flat. Il faut considérer 2 cas suivant la parité de n .



Pour n pair $\left|H(p)\right|^2 = \dfrac{K}{p^{2n} + 1}$ les pôles sont les racines 2 n iemes de -1

$$p = \sqrt[2n]{-1} = e^{j(\frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N})}$$

Exemple pour n=2:

Les deux pôles de F(p2) à gauche de l'axe imaginaire sont -√2/2+j√2/2 et -√2/2-j√2/2 d'ou $H(p) = \dfrac{K}{(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})(p + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$$H(p) = \frac{K}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$ C'est le filtre de Butterworth de second ordre.

Pour n impair les pôles sont racines 2niemes de +1 $p = \sqrt[2N]{1} = e^{(j\frac{K\pi}{N})}$

Exemple n=3 . Les racines sixièmes de 1 sont -1 et -0,5±j√3/2, qui regroupées donnent la fonction de transfert du filtre de Butterworth du troisième ordre. $H(p) = \dfrac{K}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$

Propriétés des filtres de Butterworth

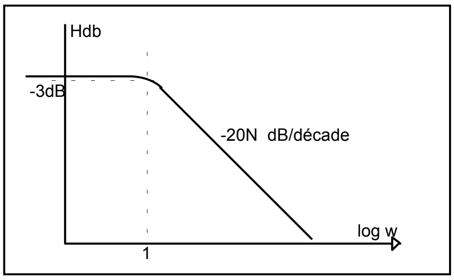
Elles sont déduites de l'expression du module normalisé . $\left|H(j\omega)\right| = \dfrac{K}{\sqrt{\omega^{2N}+1}}$

Ou en décibels : H_{dB}=-10 log(ω^{2N}+1)

Si ω <<1 Hdb=Cte

Si ω >>1 Hdb=-20N.logω et pour ω=1 H=√2/2) soit -3dB **quel que soit N**.

Comme il a été démontré plus haut le déphasage pour une fréquence infinie est de -90N degrés , il est facile de calculer que ce déphasage est moitié, soit -45N degrés, pour la fréquence de coupure.



FILTRES DE TCHEBYTCHEFF

Pour un degré fixé la pente de leur gain à la fréquence de coupure est beaucoup plus grande que celle des filtres de Butterworth mais le prix à payer est une ondulation du gain dans la bande passante.

Le module de la fonction de transfert est de la forme : $\left|H(j\omega)\right|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$

Ou $T_n(\omega)$ est un polynôme de Tchebytchef de degré n défini par :

$T_n(x) = \cos[\arccos x]$ pour x<=1

et $T_n(x) = ch[\arg ch x]$ pour x >1

En utilisant les formules de trigonométrie classique on peut montrer que :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n^2(x) = \frac{1}{2}[T_{2n}(x)+1]$$

$$avec \rightarrow T_0(x) = 1 \cdot \cdot T_1(x) = x$$

Le tableau ci contre présente les premiers polynômes de Tchebytchef ainsi que leur dérivée.

n	Tn(x)	dTn(x)/dx
0	1	0
1	x	1
2	$2x^2-1$	$4x$
3	$4x^3-3x$	$12x^2-3$
4	$8x^4-8x^2+1$	$24x^3-16x$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$80x^4-60x^2+5$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$192x^5-192x^3+36x$

Propriétés des filtres de Tchebytchef

Les fonctions de transfert de Tchebytchef dépendent d'un paramètre ε , il y a donc pour un degré donné autant de filtres que de valeurs de ce paramètre. Dans la bande passante le gain a une évolution sinusoïdale, il varie de 1 à $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$,remarquons que pour n pair Tn(0)=1 , le gain en continu est donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$, il est par contre égal à 1 pour n impair. (Figure ci dessous) . L'ondulation dans la bande s'exprime le plus souvent en décibels : $\Delta_{dB} = 10 \cdot \log(1+\varepsilon^2)$ soit $\varepsilon = \sqrt{(10^{\frac{\Delta}{10}} - 1}$

ΔdB	ε
1	0,508
2	0,764
3	1
6	1,72

Le tableau des polynômes montre que lorsque la fréquence tend vers l'infini, comportement asymptotique, $T_n(x) \to 2^{n-1}x^n$

Alors $|H(\omega)| \to \dfrac{1}{\varepsilon 2^{n-1}\omega^n}$

Soit $H_{dB} = -20Log(\varepsilon) - 20(n-1)Log2 - 20Log\omega$

Le dernier terme est le gain du Butterworth, Pour les fréquences élevée la courbe du Tchebytchef est en dessous de celle du Butterworth de même degré , l'atténuation supplémentaire étant :

A=-20 log(ε)-6(n-1)

Le tableau suivant donne la valeur de cette atténuation supplémentaire pour 3 filtres de Tchebytchef d'ondulation 1 3 et 6 dB

Atténuation supplémentaire			
n→	3	5	7
1dB	6	18	30
3dB	12	24	36
6dB	17	29	41

Pour prévoir le comportement de la courbe de gain au delà de la fréquence de coupure, il est intéressant de calculer sa pente pour ω=1.Le résultat est simple et montre combien cette pente est grande dès que le degré est supérieur à 3 .

$$H_{dB} = -10 \cdot Log(1+\varepsilon^2 T_n^2(x))$$

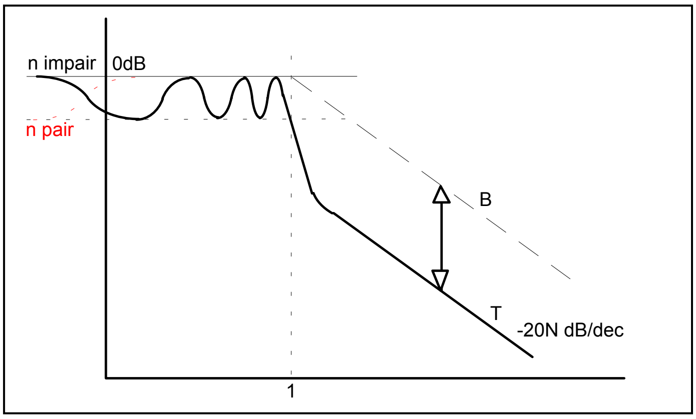
La pente cherchée ,exprimée en dB par décade est : $\dfrac{dH_{dB}}{d\log x}$

Soit :

$$\frac{dH_{dB}}{dx} = -20x\frac{\varepsilon^2 T_n(x)}{1+\varepsilon^2 T_n^2(x)}\frac{dT_n(x)}{dx}$$

Or on peut constater sur le tableau précédent que pour x=1 la dérivée de $T_n(x)$ vaut n^2. Soit :

$$\left(\frac{dH_{dB}}{d(\log x)}\right)_{x=1} = \frac{-20N^2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$



Le tableau ci dessous montre combien la pente peut être raide .Ainsi pour un Tchebytchef 3db de degré 5 le gain asymptotique est de 24dB inférieur à celui d'un Butterworth de même degré et la pente à la coupure est de 250dB par décade contre 50 seulement pour le Butterworth.

	Pente à l'infini	Pente à la coupure pour		
Degré	DB/décade	Δ=1dB	Δ=2dB	Δ=3dB
3	60	37	66	90
4	80	66	118	160
5	100	103	184	250
6	120	148	265	360
7	140	201	361	490
8	160	263	472	640

Remarques :

Pour un filtre de Tchebytchef la pulsation unité ne correspond pas à un gain de –3dB., cette pulsation n'est donc pas la fréquence de coupure à –3dB définie le plus souvent pour les amplificateurs

On a montré plus haut que les pôles de la fonction de transfert de Butterworth étaient sur un cercle de rayon 1 dans le plan complexe, on peut démontrer que ceux d'une fonction de Tchebytchef sont sur une ellipse d'autant plus aplatie que le ε est grand.

FILTRES DE BESSEL

Une fonction de transfert ayant une phase rigoureusement linéaire aurait comme fonction de transfert $Ae^{-p\tau}$ ou τ est le retard infligé au signal d'entrée. Mais ce n'est pas une fraction rationnelle en p , un tel filtre n'est donc pas réalisable .Les filtres de Bessel sont des filtres dont la fonction de transfert pour un degré donné est la meilleure approximation possible de l'exponentielle précédente.

La démarche est la suivante :

$$e^{-p} = \frac{1}{chp + shp}$$

mais $\coth(p) = \dfrac{chp}{shp} = \dfrac{1 + \dfrac{p^2}{1.2} + \dfrac{p^4}{1.2.3.4} + \ldots}{p + \dfrac{p^3}{1.2.3} + \dfrac{p^5}{1.2.3.4.5} + \ldots} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{3}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{5}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{7}{p} + \dfrac{1}{\ldots\ldots}}}}$

En se limitant par exemple au 3eme ordre :

$$\coth(p) = \frac{chp}{shp} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\dfrac{3}{p} + \dfrac{1}{\dfrac{5}{p} +}} = \frac{6p^2 + 15}{p^3 + 15p}$$

On identifie alors $\quad chp \approx 6p^2 + 15 \cdots$

$$shp \approx p^3 + 15p$$

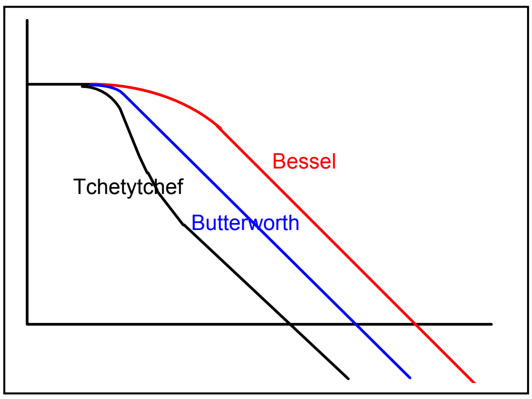
d'ou l'approximation de l'exponentielle : $e^{-p} \approx \dfrac{1}{p^3 + 15p + 6p^2 + 15}$

La fonction de transfert doit avoir un gain unité pour le continu d'ou la fonction de transfert du filtre de Bessel du troisième ordre :

$$H(p) = \frac{15}{p^3 + 15p + 6p^2 + 15}$$

On voit que pour une fréquence grande le gain tend vers $15/p^3$ il est 15 fois supérieur à celui du Butterworth de même degré.

Les filtres de Bessel ont une atténuation qui varie au delà de la fréquence de coupure beaucoup plus lentement que ceux de Butterworth Pour cette raison ils sont rarement utilisés sauf lorsque la linéarité de la phase est essentielle .



Le polynôme dénominateur est un polynôme de Bessel, on peut montrer que :

$$B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p)$$

$$B_0 = 1 \cdots\cdots B_1(p) = p + 1$$

Formule de récurrence permettant facilement de construire les polynômes successifs.

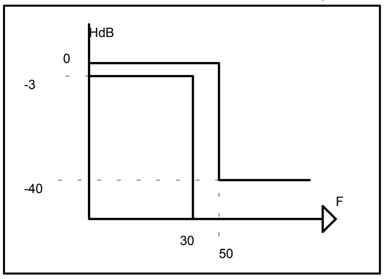
Exercice :

Soit un signal utile dont les composantes spectrales sont comprises entre 0 et 30 Hz perturbé par un bruit provenant du rayonnement des fils secteur , ce bruit a un spectre de raies de fréquences multiples de 50Hz. Nous nous imposons de ne pas atténuer le signal utile de plus de 3dB mais d'atténuer les signaux parasites d'au moins 40dB. Le gabarit du filtre à réaliser est alors représenté ci contre.

Essayons d'abord de résoudre le problème avec un filtre passe bas de Butterworth. Le gain du filtre doit entre 30 et 50Hz chuter d'au moins 40dB.Or entre ces deux fréquences il y a log(50/30)=0,222 décades, la pente de la courbe de gain doit donc être au moins de :

40/0,222=180 dB/décade

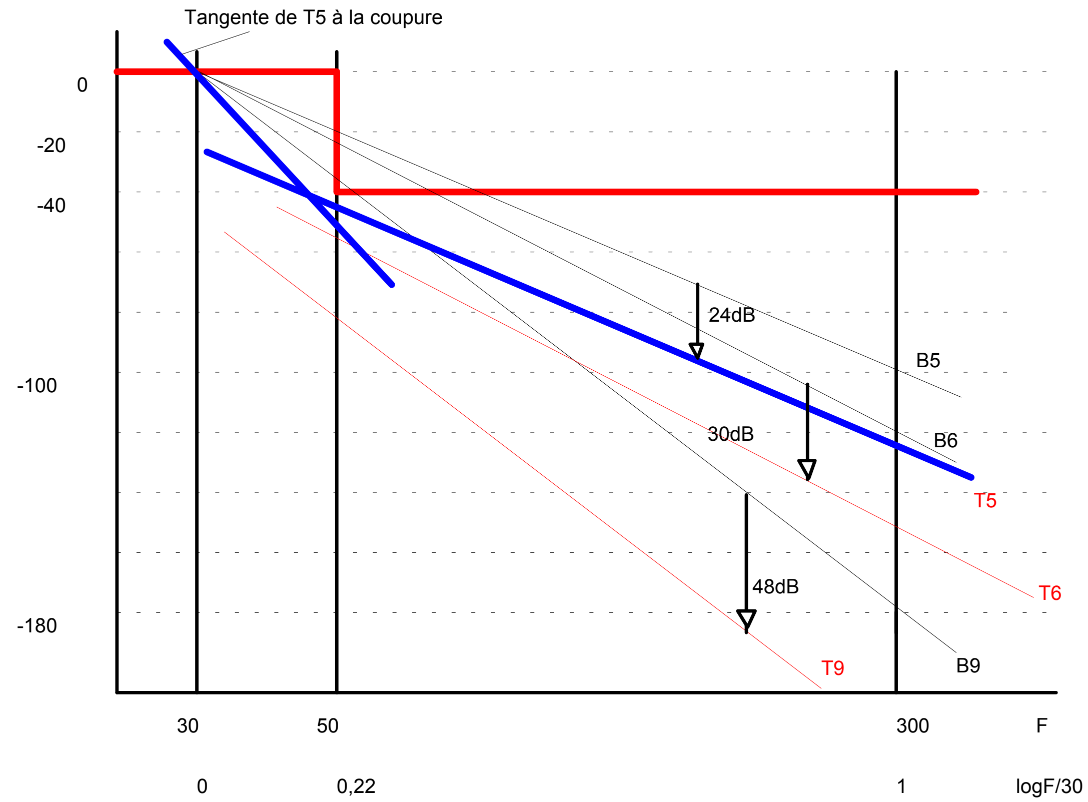
Il nous faut donc , et ce sera juste, un filtre du 9eme ordre.



Essayons maintenant avec un filtre de Tchebytchef.Pour respecter le cahier des charges dans la bande passante nous prendrons un Tchebytchef 3dB. A l'ordre 9 l'atténuation supplémentaire par rapport au Butterworth est de -48dB Pour une fréquence de 50Hz soit 0,22 décade au delà de la coupure l'atténuation sera proche de 40+48=88dB beaucoup plus que ce qui est exigé. Essayons l'ordre 6 seulement :

Au bout de 0,22 décade le Butterworth chute de 20x6x0,22=26,4db soit 13,6 db de moins que ce qui est demandé, mais un Tchebytchef 3dB d'ordre ajoute 30 db .L'asymptote du Tchebytchef passe donc a -26,4-30=-56dB ce qui est suffisant. (Figure ci contre) .

A l'ordre 5 le Butterworth est à -20x5x0,22=-22dB et l'atténuation supplémentaire du Tchebytchef 24dB soit –46db .Donc à priori un Tchebytchef 3dB du 5eme ordre suffit .Pour le confirmer traçons la pente du gain à la coupure d'un tel filtre, elle vaut 250dB/décade .La figure ci contre montre que ce choix est certainement judicieux.



Détermination du filtre compatible avec le gabarit