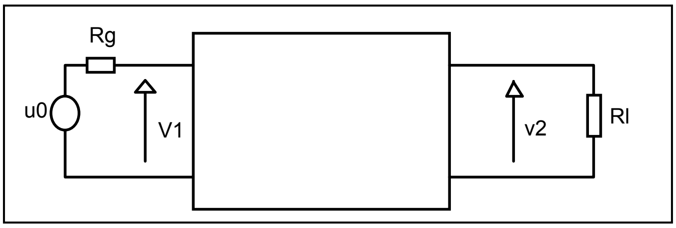
SYNTHESE des FILTRES PASSIFS

PROPRIETES DES FILTRES PASSIFS

Un filtre est passif s'il ne nécessite pour fonctionner aucune source d'alimentation. Il est constitué essentiellement de résistances , selfs et condensateurs .(En UHF il faut y ajouter les gyrateurs qui sont réalisables avec des ferrites.)

Un filtre passif est forcément stable , le dénominateur de sa fonction de transfert est donc nécessairement un polynôme de Hurtwitz. Par exemple les coefficients des puissances de p du dénominateur sont tous positifs.

Constitué de composants passifs de valeurs finies un filtre passif à une impédance d'entrée qui n'est jamais infinie et une impédance de sortie jamais nulle. De plus ces impédances varient toujours avec la fréquence. La fonction de transfert d'un filtre passif ne peut donc être définie qu'en association avec un générateur et une charge d'impédances déterminées.



La fonction de transfert est définie par : V_2/V_1 ou parfois par V_2/u_0.Ces deux définitions ne sont pas identiques ni même proportionnelles car l'impédance d'entrée dépend de la fréquence .On cherche souvent à réaliser une **adaptation d'impédance** Ze=Rg , ***mais ce n'est possible qu'a une seule fréquence***, le continu pour un passe bas, la fréquence centrale pour un passe ou coupe bande. Dans ce cas pour cette fréquence , et là seulement, $V_1=u_0/2$ Le plus souvent les filtres sont construits pour Rg=RL=R , résistance de normalisation , souvent 50 ou 75Ω en haute fréquence.

La synthèse d'un filtre à partir de sa fonction de transfert ,c'est à dire la détermination des composants constituant le filtre est une démarche difficile .Elle repose sur les propriétés mathématiques des fonctions de transfert et des impédances qu'il faudrait un cours entier pour exposer.

Consulter par exemple :Synthèse des circuits passifs A CARRERE Editions MASSON

La difficulté majeure provient du fait qu'une fonction de transfert n'est souvent réalisable qu'avec une structure particulière du filtre , c'est à dire une configuration des composants qui est inconnue à priori. Les techniques de synthèse sont définies pour chaque structure et on peut tâtonner longuement avant de trouver la bonne. De toute façon toutes les méthodes passent par une synthèse d'impédance ou admittance. Nous développerons ce point.

SYNTHESE DES IMMITTANCES

On appelle immittance une impédance ou une admittance .

Une immittance I(p) passive est forcément stable Or on peut considérer une impédance Z comme la fonction de transfert d'un système linéaire dont la grandeur de sortie est la tension et la grandeur d'entrée un courant . Le dénominateur D(p) est donc un polynôme de Hurwitz .Mais l'admittance 1/Z peut de même être considérée comme un système dont la grandeur de sortie est un courant et celle d'entrée une tension. Elle est stable également , N(p) est donc aussi un polynôme de Hurwitz.

Les deux polynômes N(p) et D(p) d'une impédance $Z(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$ sont des polynômes de Hurtwitz , donc ne contiennent que des coefficients positifs.

Lorsque la fréquence tend vers l'infini une immittance quelconque prend la forme d'une résistance (I indépendant de f) , d'une self (Z varie comme f) , ou d'une capacité (Z varie comme 1/f) .Il en découle que ;

Pour une immittance **| Degré Numérateur - Degré dénominateur |<=1**

La puissance dissipée dans une impédance est :

P=1/2Re(VI*)

Soit P=1/2 Re(ZII*)=1/2Re(Z|I|^2)

Or P est positive , donc **Re[Z(ω)] est positive pour ω** Si le dipôle ne contient pas de résistances cette puissance est nulle. C'est à dire que:

Un dipôle sans pertes (constitué de L et C seulement) **à une immittance dont la partie réelle est nulle.**

Alors Z(jω)=j.Img(ω) donc Z(-jω)=-j.Img(ω) en conséquence : Z(jω)+Z(-jω)=0 c'est à dire Z(p)+Z(-p)=0 Z(p) est une fonction impaire de p .

Pour un dipôle sans pertes l'immittance est une fonction impaire de p

$$Z(p) = p\frac{N(p^2)}{D(p^2)}...ou.....\frac{1}{p}\frac{N(p^2)}{D(p^2)}$$

Mais comme N(p^2) et D(p^2) ont des pôles et zéros à répartition quadrantale, or ils ne peuvent se trouver à droite de l'axe imaginaire puisque le dipôle est stable, ils sont donc forcément sur cet axe. Donc

$$N(p^2)...et...D(p^2) = \prod_K (p^2 + \omega_K^2)$$

On peut montrer de plus que pôles et zéros sont alternés.

Pour un dipôle passif il existe un pôle ou zéro à l'origine et les autres sont sur l'axe imaginaire et alternés.

Cas des dipôles RC :

Partons d'un dipôle LC , multiplions toutes les selfs par a et les capacités par b .

Lp ⇒ aLp

1/Cp ⇒1/bCp

Il est équivalent de remplacer p par αp et de multiplier toutes les impédances par K :

Lp ⇒ K Lαp

1/CP ⇒ K/Cαp

d'ou $\alpha = \sqrt{ab}$ et $K = \sqrt{\frac{a}{b}}$

L'impédance devient donc $Z(p) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot Z(\sqrt{ab}\,p)$

Mais rien n'oblige a et b à être indépendants de p . Prenons par exemple a=1/p et b=1 soit

$K = \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Les selfs Lp deviennent $\frac{1}{\sqrt{p}}L\frac{1}{\sqrt{p}}p = L$ c'est à dire des résistances alors que les condensateurs $\frac{1}{Cp} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{1}{C\frac{1}{\sqrt{p}}p} = \frac{1}{Cp}$ sont inchangés. Le circuit LC est devenu un circuit RC. Mais pour un LC $Z(p) = p\frac{V(p^2)}{W(p^2)}$

Avec pour V et W une forme en $\prod_K (p^2+\omega_K^2)$

En remplaçant p par αp et multipliant le tout par K on obtient

$$(\frac{1}{\sqrt{p}})p(\frac{1}{\sqrt{p}})\frac{\prod(p+\omega_K^2)}{\prod_j(p+\omega_j^2)}=\frac{\prod(p+\omega_K^2)}{\prod_j(p+\omega_j^2)}$$

Les pôles et zéros d'une admittance RC sont réels négatifs et alternés sur l'axe réel.

Ce résultat n'était pas évident , on aurait pu penser que les pôles et zéros d'un dipôle RC puissent être complexes .

Comme pour les fonctions de transfert la synthèse des immittances repose sur un choix initial de structure. Nous citerons les deux méthodes les plus connues.

Méthodes de Forster

On fait l'hypothèse que l'impédance à synthétiser est constituée par des éléments placés en série ou en parallèle.

Soit une impédance $Z(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ on peut la mettre en séparant pôles réels et complexes sous la forme :

$$Z(p)=a_1p+a_0+\sum_c\frac{R_c}{p+\omega_c}+\sum_K\frac{A_Kp+B_K}{p^2+2\alpha_Kp+\omega_K^2}$$

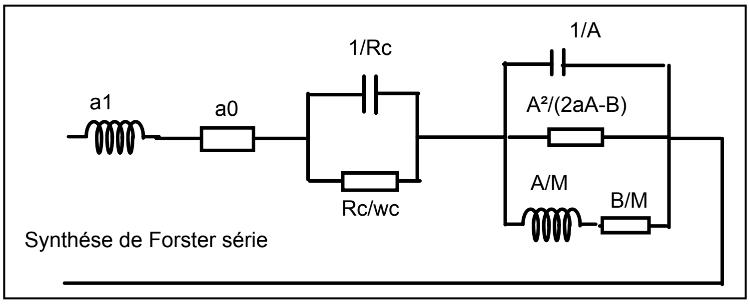
qu'il suffit d'identifier :

Le premier terme est une self de valeur a_1

Le second une résistance a_0

Le troisième est l'association en parallèle d'une résistance R_c/ω_c et d'un condensateur $1/R_c$

La difficulté vient du terme suivant construit à partir des pôles complexes conjugués. On peut montrer en effet qu'il est obtenu en plaçant 3 branches en parallèle comme le montre la figure ci contre. Un condensateur $1/A_k$



Une résistance $\frac{A_k^2}{2\alpha_KA_K-B_K}$

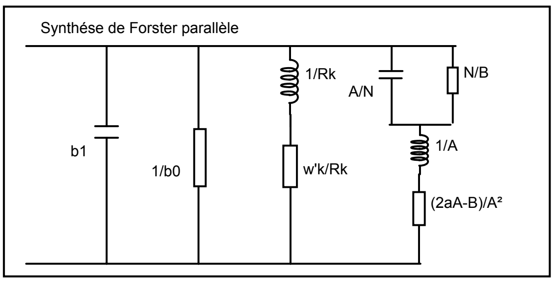
Et un ensemble constitué par une self $L=\frac{A_K}{M_K}$ en série avec une résistance $\frac{B_K}{M_K}$

Avec $$M_K=\omega_K^2+\left(\frac{B_K}{A_K}\right)^2-\frac{2\alpha_KB_K}{A_K}$$

La synthèse n'est possible que si ce coefficient M est positif. Dans le cas contraire cela ne veut pas dire que l'impédance ne peut pas être réalisée , mais seulement qu'elle ne peut pas l'être avec cette structure.

De la même façon il est possible de travailler avec l'admittance $Y(p)=\frac{D(p)}{N(p)}$ en effectuant un développement sur les zéros. (Méthode de Forster parallèle).

$$Y(p)=b_1p+b_0+\sum_K\frac{R_K}{p+\omega_K}+\sum_L\frac{A_L'p+B_L'}{p^2+2\alpha_L'p+\omega_L^2}$$

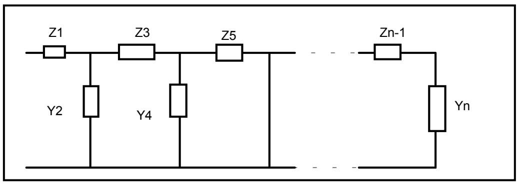


Ce qui conduit au schéma suivant constitué de branches en parallèle,
-un condensateur b1
-une résistance 1:b0 si ces coefficients existent c'est à dire que le degré du numérateur de Y est supérieur à celui de son dénominateur.
-une self $1/R'_c$ en série avec une résistance ω'_c/R'_c
-une self 1/A en série avec une résistance $(2\alpha A-B)/A^2$, le tout en série avec un groupe RC de R=N/B et C=A/N.
Le coefficient N étant défini par la même expression que le M ci dessus. Le filtre n'est réalisable avec cette structure que si le coefficient N est positif.

Méthodes de Cauer

On fait l'hypothèse d'une structure en échelle .L'impédance du dipôle s'écrit :

$$Z=\frac{N}{D}=Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\ldots}}}$$



Pour identifier les divers composants effectuons une division des deux polynômes N et D

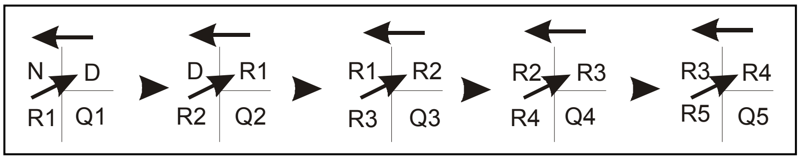
$N=DQ_1+R_1$ soit $\frac{N}{D}=Q_1+\frac{R_1}{D}=Q_1+\cfrac{1}{\cfrac{D}{R_1}}$

D'ou la seconde division : $D=Q_2R_1+R_2$ d'ou $\frac{N}{D}=Q_1+\cfrac{1}{Q_2+\cfrac{R_2}{R_1}}=Q_1+\cfrac{1}{Q_2+\cfrac{1}{\cfrac{R_1}{R_2}}}$

La troisième division $R_1=Q_3R_2+R_3$ soit $\frac{R_1}{R_2}=Q_3+\frac{R_3}{R_2}$ et en remplaçant dans l'expression

de Z : $\frac{N}{D}=Q_1+\cfrac{1}{Q_2+\cfrac{R_2}{R_1}}=Q_1+\cfrac{1}{Q_2+\cfrac{1}{Q_3+\cfrac{1}{\cfrac{R_2}{R_3}}}}$ et ainsi de suite .

Il ne reste qu'a identifier $Z_1=Q_1$ $Y_2=Q_2$ $Z_3=Q_3$ …. Les quotients sont alternativement des impédances et des admittances. La méthode est illustrée par la figure suivante .



Exemple : Soit $Z(p)=\frac{8p^4+24p^3+17p^2+12p+4}{8p^3+24p^2+13p+1}$

Effectuons les divisions successives

$8p^4+24p^3+17p^2+12p+4$	$8p^3+24p^2+13p+1$
$4p^2+11p+4$	p

le premier quotient est p , c'est une self de valeur 1 .En permutant dividende et diviseur, diviseur et reste la seconde division donne :

$8p^3+24p^2+13p+1$	$4p^2+11p+4$
$2p^2+5p+1$	$2p$

Le quotient 2p est une admittance c'est à dire un condensateur de valeur 2 .
Nouvelle permutation , nouveau quotient :

$4p^2+11p+4$	$2p^2+5p+1$
$p+2$	2

Quotient 2 c'est une résistance R=2 :

$2p2+5p+1$	$p+2$
$p+1$	$2p$

Quotient 2p c'est une admittance donc un condensateur C=2.

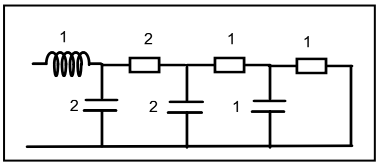
$p+2$	$p+1$
1	1

quotient 1 donc résistance R=1

$p+1$	1
1	p

quotient p , c'est une admittance donc C=1 Il faut poursuivre la division :

1	1
0	1



quotient 1 c'est une résistance , et il faut continuer :

1	0
	$\propto$

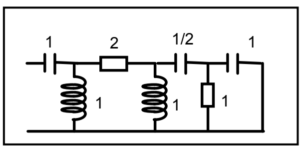
quotient infini mais c'est une admittance , donc une résistance nulle qui ferme le circuit.
La méthode précédente faisant appel à une division de polynômes par puissance décroissantes est appelée méthode de Cauer décroissante. Mais rien ne s'oppose à ce que la division soit faite par puissances croissantes .Par exemple :

$$Z(p)=\frac{4+10p+12p^2+11p^3+6p^4+2p^5}{4p+10p^2+8p^3+3p^4+p^5}$$

conduit aux quotients et restes du tableau suivant :

Dividende	Diviseur	Quotient	Nature	Reste
$4+10p+12p^2+11p^3+6p^4+2p^5$	$4p+10p^2+8p^3+3p^4+p^5$	1/p	C=1	$4p^2+8p^3+5p^4+2p^5$
$4p+10p^2+8p^3+3p^4+p^5$	$4p^2+8p_3+5p^4+2p^5$	1/p	L=1	$2p^2+3p^3+p^4+p^5$
$4p^2+8p_3+5p^4+2p^5$	$2p^2+3p^3+p^4+p^5$	2	R=2	$2p^3+3p^4$
$2p^2+3p^3+p^4+p^5$	$2p^3+3p^4$	1	L=1/p	p^4+p^5
$2p^3+3p^4$	p^4+p^5	2/p	C=1/2	p^4
p^4+p^5	p^4	1	R=1	p^5
p^4	p^5	1/p	C=1	0
p^5	O	$\propto$	R=0	

d'ou le schéma ci contre.



Malgré son apparente simplicité la méthode rencontre de nombreux obstacles qui se manifestent par l'apparition de coefficients négatifs.

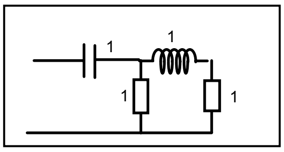
Remarquons d'abord que si la division est effectuée par puissances décroissantes les quotients peuvent être une constante ou un terme en p , soit une résistance ou une self dans la branche série et un condensateur en parallèle. Inversement par puissances croissantes les quotients sont Cte ou en 1/p , c'est à dire une capacité dans la branche série et une self en parallèle. Ainsi si l'impédance proposée comporte des capacités et des self en série ou parallèle, il faut pour en trouver la structure inverser l'ordre des divisions en cours de processus ,mais à un endroit à priori inconnu. Considérons par exemple la fonction suivante :

$$Z = \frac{p^2 + 2p + 2}{p^2 + 2p}$$

Un essai de division par puissances décroissantes échoue car à la seconde division le quotient est en p², non réalisable avec des composants passifs.

p²+2p+2 | p²+2p ⇒ p²+2p | 2
2 | 1 | p²/2

Un second essai par puissances croissantes échoue également :



2+2p+p² | 2p+p² ⇒2p+p² | p+p²
p +p² | 1/p -p² | 2

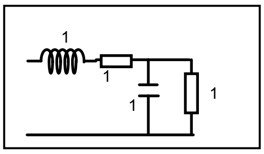
et cependant le dipôle existe, il suffit d'effectuer la seconde division par puissances décroissantes

2+2p+p² | 2p+p² ⇒p²+2p | p²+p ⇒ p²+p | p ⇒p | p
p +p² | 1/p p+1 | 1 p | p 0 | p

Dans certains cas il est possible de poursuivre la division jusqu'au second terme du quotient. Par exemple pour :

$$Z = \frac{p^2 + 2p + 2}{p + 1}$$

La division normale conduit à un reste négatif à la seconde étape. Par contre en poursuivant la division :



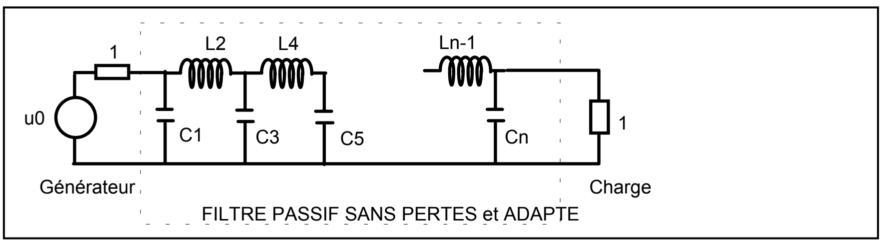
p²+2p+2 | p+1 ⇒ p+1 | 1
p+2 | p+1 0 | p+1
1 |

Le schéma obtenu n'est pas en toute rigueur un réseau en échelle puisque les barreaux sont doubles .

On peut bien sûr appliquer la méthode de Cauer à une admittance , dans ce cas le circuit commence par un composant en parallèle.

Exemples de filtres passifs sans pertes

Nous ne décrirons pas de méthodes de synthèse de fonctions de transfert passives , le lecteur pourra se reporter par exemple à l'ouvrage cité plus haut . Nous donnerons seulement la structure des filtres les plus courants pour les premiers ordres.



La structure est représentée ci dessus, le filtre est attaqué par une source d'impédance unité et chargé par une résistance de même valeur. Le composant final est un condensateur pour un degré impair mais une self si n est pair. Les filtres d'ordre impair , plus symétriques sont souvent préférès.

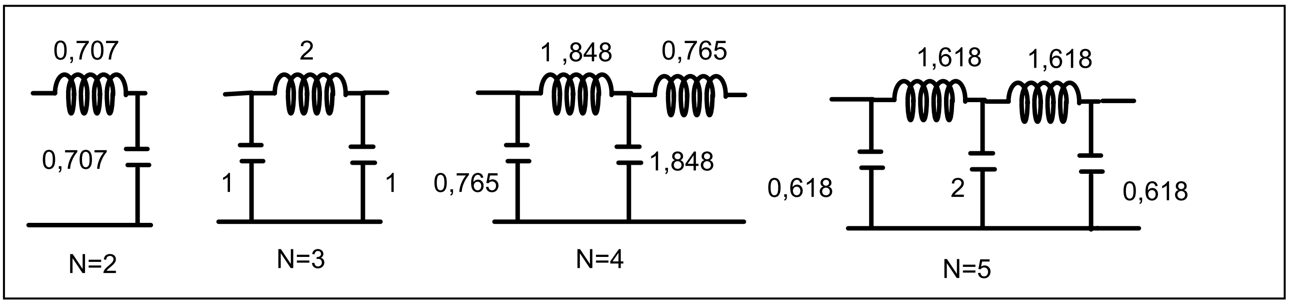
Filtres de Butterworth

Les composants du filtre sont donnés par les formules suivantes :

$$C_i. = 2.\sin(\frac{2i-1}{2n}\pi)..........i = 1,3,5....$$

$$L_i = 2.\sin(\frac{2i-1}{2n}\pi)............i = 2,4,6,8,.....$$

La figure suivante représente les premiers.



On remarquera:
Les valeurs sont symétriques par rapport au composant central s'il existe.
Le composant central s'il existe vaut toujours 2
Le produit de toutes les valeurs est toujours égal à 2
Ce sont des conséquences des formules précédentes.

Filtres de Tchebytchef

La structure choisie est la même mais les formules permettant le calcul bien plus complexes.

Pour un ordre n et une ondulation ΔdB dans la bande passante :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\Delta}{10}} - 1}$$

$$\gamma = sh\left[\frac{Ln\left(Coth\frac{\Delta_{dB}}{40\log(e)}\right)}{2n}\right]$$

Pour i=1,2,3,…,n

$$a_i = \sin\frac{2i-1}{2n}\pi$$

Pour i=1,2,3,…n-1

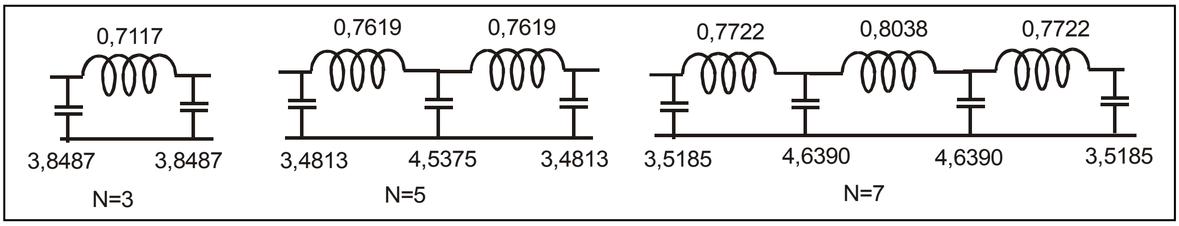
$$b_i = \gamma^2 + \sin^2(\frac{i\pi}{n})$$

$$G_1 = \frac{2a_1}{\gamma}$$

$$G_i = \frac{4a_{i-1}a_i}{b_{i-1}G_{i-1}}$$

alors $L_i=G_i$ pour i pair et $C_i=G_i$ pour i impair .

Pour des filtres d'ondulation 3dB les premiers sont les suivants .

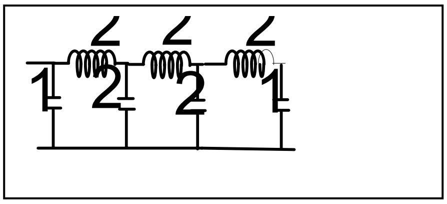


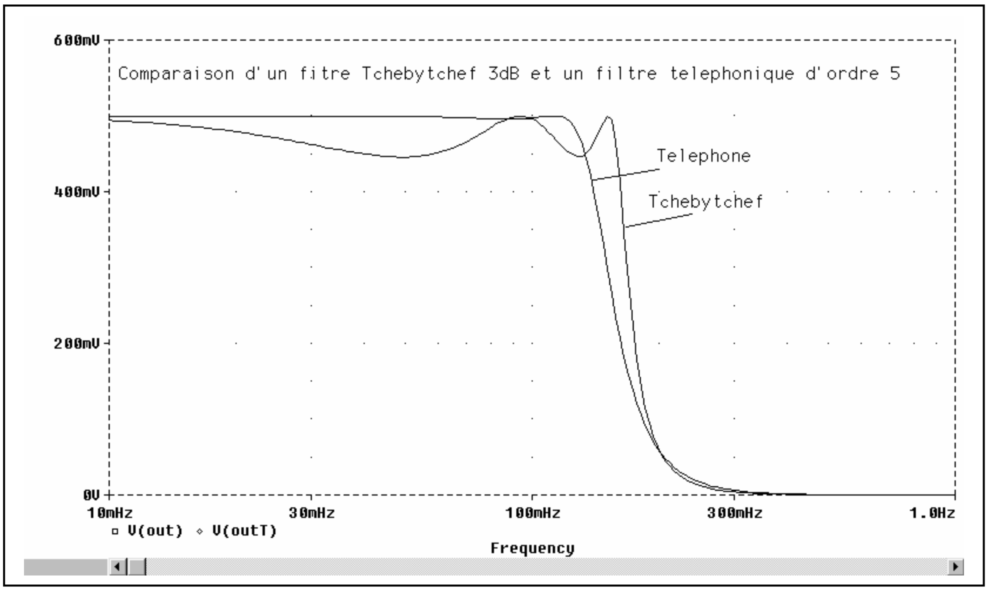
Degré	C	L	C	L	C	L	C	L	C	L	C	L
3	3,3487	**0,7117**	3,3487									
4	3,4389	0,7483	4,3470	0,5920								
5	3,4813	0,7619	**4,5375**	0,7619	3,4813							
6	3,5045	0,7685	4,6061	0,7929	4,4641	0,6033						
7	3,5185	0,7722	4,6390	**0,8038**	4,6390	0,7722	3,5185					
8	3,5277	0,7745	4,6575	0,8089	4,6991	0,8018	4,499	0,6073				
9	3,5339	0,7760	4,6691	0,8118	**4,7271**	0,8118	4,6991	0,7760	3,5339			
10	3,5384	0 ,7771	4,6768	0,8136	4,7524	0,8164	4,7261	0,8051	4,5242	0,6091		
11	3,5418	0,7779	4,6863	0,8148	4,7520	**0,8189**	4,7520	0,8148	4,6863	0,7779	3,5418	
12	3,5443	0,7785	4,6863	0,8156	4,7584	0,8205	4,7662	0,8192	0,7379	0,8067	4,5222	0,6101

Filtres de Tchebytcheff 3dB

Filtres téléphoniques

Au début du siècle avant l'invention des ordinateurs les utilisateurs ne disposant pas de moyens de calcul rapide utilisaient le filtre dit téléphonique dont les deux condensateurs des extrémités valaient 1 et tous les autres composants 2 . Ce filtre empirique est plus efficace qu'un Butterworth mais moins bon qu'un Tchebytchef , son gain chute plus lentement et ondulation dans la bande utile est moins régulière bien que souvent plus faible Dans un cas non critique ce peut être un bon choix.

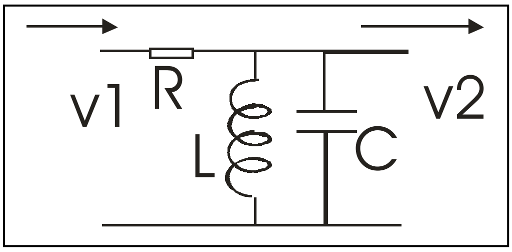




Note :

Comportement asymptotique d'un passe bande type circuit bouchon

Pour sélectionner les composantes harmoniques d'un signal proches d'une fréquence donnée on utilise très souvent un circuit passe bande RLC (circuit bouchon) .Cependant si la forme de la courbe de réponse au voisinage de la résonance est bien connue, il n'en est pas de même de cette forme loin de cette fréquence et l'atténuation dans cette zone est moins importante que ce que l'on croit au premier abord.



Le gain d'un tel filtre est :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{j\dfrac{x}{Q}}{(1-x^2) + j\dfrac{x}{Q}} \quad \text{avec}$$

$$x = \frac{f}{f_0} \quad et \quad Q = R/L\omega_0$$

Si x<<1 cette expression se simplifie en :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{j\frac{x}{Q}}{(1+j\frac{x}{Q}} \neq j\frac{x}{Q}$$ La pente est de +20dB par décade et l'asymptote passe pour x=1 par G=1/Q

De même pour les fréquences beaucoup plus grandes que la fréquence de résonance x>>1 , le terme en x² est dominant et

$$\frac{v_2}{v_1} \approx -\frac{j}{Qx}$$ Le gain diminue de 20dB par décade , avec pour même valeur asymptotique G=1/Q pour x=1 .

Pour préciser la forme de courbe autour de x=1 cherchons pour quelles fréquences le gain vaut 1/Q en valeur absolue :

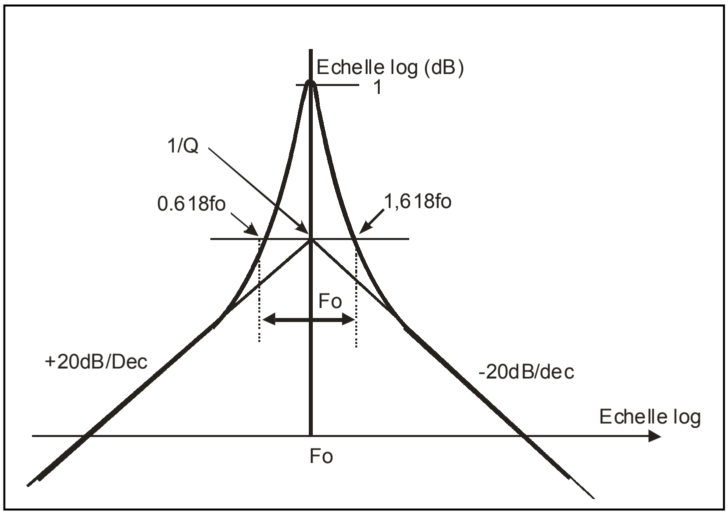
$$\left|\frac{v_2}{v_1}\right| = \frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = \frac{1}{Q}$$

qui s'écrit : $\frac{(1-x^2)^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{Q^2}$

Les deux racines x_1 et x_2 de cette équation n'ont pas une expression simple mais il est facile de montrer :

- Qu'elles ont pour moyenne géométrique la fréquence centrale, c'est une propriété bien connue de la courbe en cloche
- Leur distance est égale à l'unité , c'est-à-dire en dénormalisant que ces deux fréquences sont telles que $f_2 - f_1 = f_0$

D'où la forme de la courbe ci-dessous :



Par exemple pour f_0=1Mhz et Q=50 l'atténuation est de 1/50 soit -34dB pour 1,62Mhz et 0,62Mhz , et approximativement -54dB pour 10Mhz et 100kHz (une décade de chaque coté de la résonance)