LES FILTRES NUMERIQUES

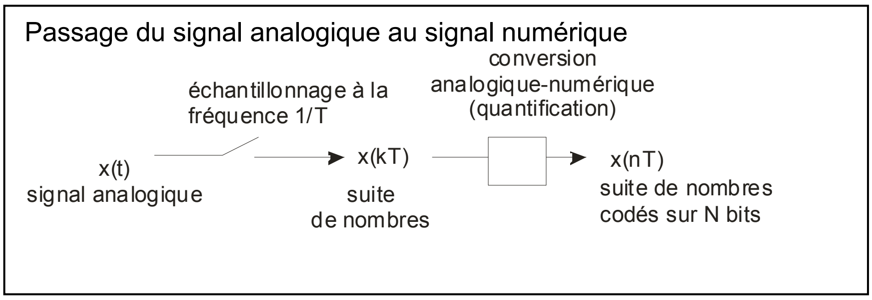
Ce sont des dispositifs qui effectuent sur un signal d'entrée numérique des opérations analogues à un filtrage

SIGNAL NUMERIQUE ET FILTRE NUMERIQUE

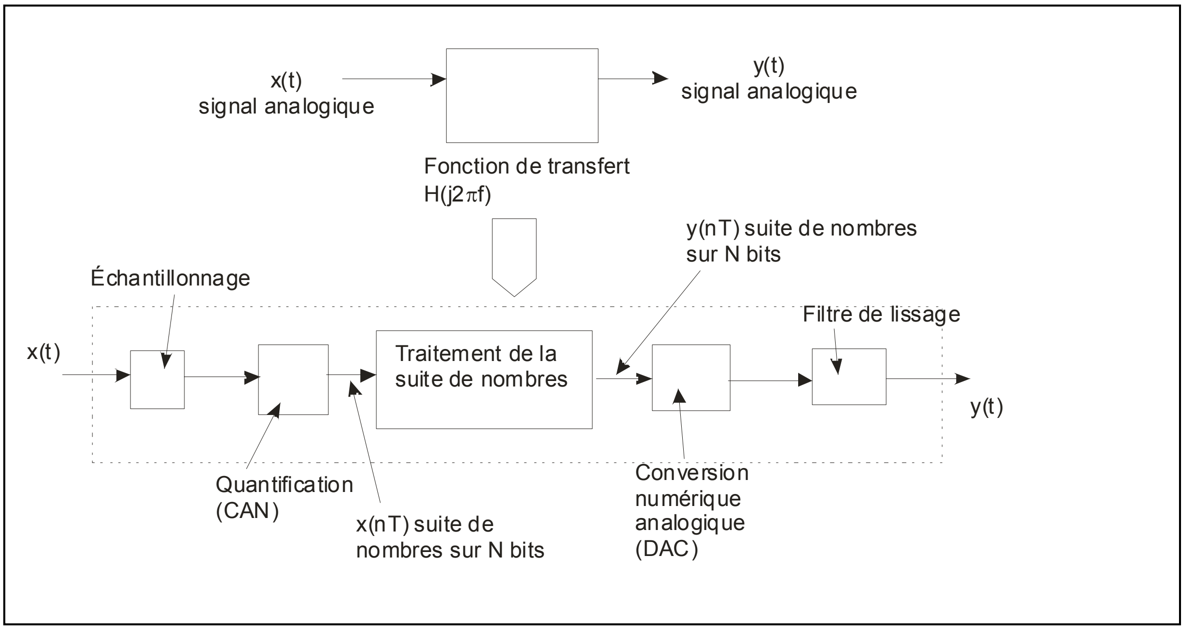
Un signal numérique est une suite de nombres obtenue à partir d'un signal analogique fonction du temps par deux opérations successives :

L'échantillonnage qui consiste à ne conserver du signal que ces valeurs à des instants répartis régulièrement dans le temps

La quantification qui consiste à mesurer chaque échantillon et fournir un nombre.



. Le filtre numérique équivalent à un filtre analogique peut être défini comme le montre la figure suivante :



On appelle souvent **filtre numérique** l'algorithme de traitement appliqué à la suite de nombre x(nT) plus tôt que l'ensemble du dispositif représenté sur la figure qui fait passer de x(t) à y(t) .

PRINCIPE ET PROPRIETES FONDAMENTALES D'UN FILTRE NUMERIQUE

Comme on l'a vu dans les chapitres précédents un filtre analogique est un système différentiel, il applique au signal analogique d'entrée des **opérations** essentiellement **linéaires**. Or après numérisation on ne dispose que d'une suite de nombres. L'opération linéaire la plus générale que l'on puisse appliquer à cette suite est une combinaison linéaire qui à un instant kT (T étant la période d'échantillonnage) délivre un nombre y(kT) c'est-à-dire :

$$y(nT) = \sum_{k=A}^{P} a_K x[(n-k)T] + \sum_{l=0}^{P} b_l y[(n-l)T]$$

Si tous les coefficients b_l sont nuls la valeur de sortie à un instant kT ne dépend que des échantillons présentés à l'entrée et non des sorties précédentes. Si la limite inférieure A de la première sommation est nulle seuls les échantillons d'entrée antérieurs sont pris en compte, le filtre est un **filtre temps réel**, sinon les valeurs de x à des instants futurs (pour un indice supérieur à n) sont également utilisés , le filtre ne peut être appliqué qu'a une suite de nombres préalablement enregistrée, on parle de **filtres en temps différé.**

Si les coefficients b ne sont pas nuls la valeur y de sortie à un instant nT dépend non seulement des valeurs d'entrée mais aussi des valeurs de sorties précédentes, c'est **un filtre récursif**.

Deux exemples intuitifs mettent en évidence les propriétés essentielles de ces filtres.

Le dérivateur

Il fait correspondre à un signal x(t) sa dérivée dx(t)/dt .En analogique le dérivateur parfait à comme fonction de transfert

H(p)=p

Dans le cas présent : $Lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ ne peut être évaluée que de façon approchée puisque Δt ne peut pas être inférieur à la période d'échantillonnage. Le différentiateur numérique sera donc défini par :

$$y(nT) = [x(nT) - x[(n-1)T]].\frac{1}{T}$$

ou en prenant T comme unité de temps :

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Pour évaluer quel est le comportement d'un tel filtre en fonction de la fréquence du signal d'entrée (avant qu'il ne soit échantillonné) , prenons comme signal d'entrée la fonction propre

x(t)=exp(jωt)

Les échantillons sont alors : $xtkT) = e^{j\omega kT}$

Et à l'instant nT le signal de sortie vaut :

$$y(nT) = e^{j\omega nT} - e^{j\omega(n-1)T} = e^{j\omega nT}[1 - e^{j\omega T}]$$

On passe de la suite d'entrée x(nT) à celle de sortie par une multiplication par $[1-e^{j\omega T}]$. qui ne dépend que de la fréquence et non de l'indice n .Ce terme multiplicatif est la **fonction de transfert isochrone du filtre** . Nous la noterons :

$$H_N(j\omega) = 1 - e^{j\omega T}$$

qui se développe en :

$$H_N(j\omega) = (1 - \cos\omega T) + j\sin(\omega T)$$

son module est :

$$\left|H_N(j\omega)\right| = \sqrt{(1-\cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T} = \sqrt{2}.\sqrt{1-\cos\omega T}$$

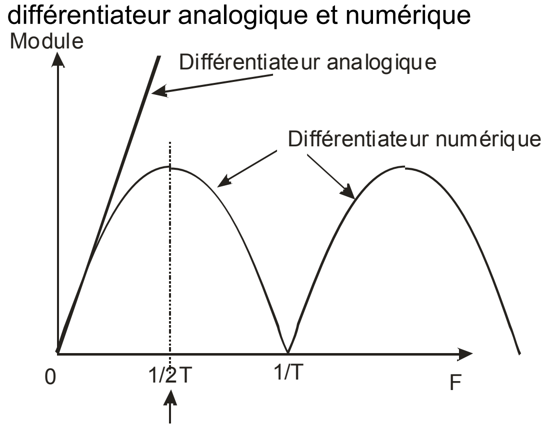
surprise , cette **fonction de transfert est périodique** .

Si ω est petit $\sqrt{1-\cos\omega T} \Rightarrow \sqrt{1-[1-\omega^2T^2/2]} = \dfrac{\omega T}{\sqrt{2}}$

Et la fonction de transfert tend vers :

$$Lim_{\omega\mapsto 0}\left|\ H_N(j\omega)\ \right| = \omega T$$

Comparaison des modules des filtres différentiateur analogique et numérique



C'est bien le module du dérivateur analogique parfait .

La périodicité est une conséquence de l'échantillonnage.Le spectre d'un signal échantillonné étant périodique il est normal que la fonction de transfert du filtre numérique possède la même propriété.C'est une différence essentielle existant entre les filtres analogiques et numériques**. Il est donc impossible de réaliser un filtre numérique rigoureusement équivalent à filtre analogique pour toute fréquence.**

Un filtre numérique doit toujours être précédé d'un filtre passe bas qui limite l'étendue du spectre du signal d'entrée. C'est le **filtre anti-repliement** (anti- aliasing)

L'intégrateur

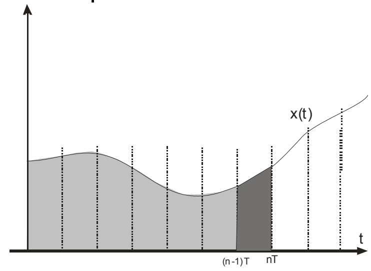
La sortie est l'intégrale de l'entrée : $y(t) = \int_0^t x(t)dt$

En analogique la fonction de transfert d'un intégrateur parfait est : $H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega}$

L'intégrale est la surface sous la courbe que l'on peut évaluer par la méthode des trapèzes La surface sous la courbe à l'instant nT est celle à l'instant (n-1)T augmentée de la surface hachurée en gris foncé qui peut être approximée par celle du trapèze soit

$$y(nT) = y[(n-1)T] + \left[\frac{x[(n-1)T] + x(nT)}{2}\right].T$$

Calcul de l'intégrale par la méthode des trapèzes :



C'est l'algorithme de calcul du filtre intégrateur. C'est dans ce cas un filtre récursif puisque la sortie à un instant nT dépend de ses valeurs aux instants précédents.

Dans ce cas la notion de fonction de transfert isochrone apparaît moins clairement , nous y reviendrons plus loin.

Un outil fondamental pour l'étude des filtres numériques :

La transformation en z

Les signaux échantillonnés sont constitués par des suites de nombres que l'on peut représenter par des peignes de Dirac (suite d'impulsions* de Dirac dont les poids sont les amplitudes des échantillons) *(Pour plus de détail voir le cours de traitement de signal .)
Nous mettrons donc le signal échantillonné du signal f(t) sous la forme

$$f^{\wedge}(t) = \sum_k f(t).\delta(t-kT) \qquad (1)$$

ou ce qui revient au même :

$$f^{\wedge}(t) = \sum_k f(kT).\delta(t-kT) \qquad (2)$$

On sait que la transformée de Fourier d'un Dirac est le nombre 1 $\Im[\delta(t)] = 1$

En vertu du théorème du retard celui du Dirac décalé est $\Im[\delta(t-KT)] = e^{-j2\pi fKT}$

La transformée de Fourier de l'expression 2 est alors :

$$\Im[f^{\wedge}(t)] = F^{\wedge}(j2\pi f) = \sum_k f(kT)e^{-j2\pi fkT} = \sum_k f(kT)\left[\exp(-j2\pi fT)\right]^k$$

En posant exp(j2πfT) = z cette expression devient :

$$F^{\wedge}(j2\pi f) = \sum_k f(kT).z^{-k}$$

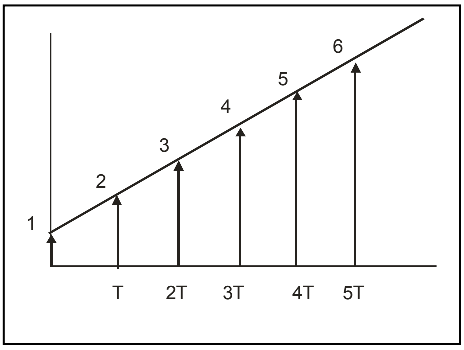
C'est ce que l'on appelle la transformée en z de la suite de nombres f(kT) .

---

* *Le terme impulsion de Dirac est impropre, voir dans le cours de traitement de signal le chapitre sur la théorie des distributions*

Propriété fondamentale : opérateur retard

Soit la suite x(0)=1 x(1)=2 x(2)=3 x(3)=4 ….
Qui peut être obtenue en échantillonnant un signal en dent de scie croissante.



Il lui correspond la transformée en z :

$F(z)=1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4.z^{-3} + \ldots$

Lorsque la suite de nombres a une longueur infinie la transformée en z n'existe que si la suite est convergente.

Soit maintenant une suite x(0) x(1) x(2) x(3) …..

Elle a comme transformée en z

$$X(z)=x(0) + x(1).z^{-1} + x(2).z^{-2} + x(3).z^{-3} + \ldots$$

Retardons cette suite d'une période , elle devient :

y(0)=0 y(1)=x(0) y(2)=x(1) y(3)=x(2) y(4)=x(3) …

de transformée

$$Y(z)=y(1).z^{-1}+y(2).z^{-2} + \ldots = x(0).z^{-1} + x(1).z^{-2} + x(2).z^{-3} + \ldots$$

C'est-à-dire : $Y(z) = X(z).z^{-1}$

Le produit par z-1 est équivalent à un retard.

Il serait logique d'introduire la grandeur $r=z^{-1}$, c'est la **transformée en r** elle est -rarement utilisée.

Fonction de transfert en z

Les filtres numériques travaillent avec des suites de nombres.A partir d'une suite d'entrée e(n) ils délivrent une suite de sortie s(n) .A chacune de ces suites on peut associer une transformée en z et nous montrerons qu'i existe une fonction de z H(z) telle que :

$$S(z)=E(z).H(z)$$

H(z) est la fonction de transfert en z du filtre.

Soit par exemple un filtre numérique d'algorithme :

$$s(nT)= e(nT)+ a_1.e[(n-1)T]+ a_2.e[(n-2)T]$$

Si la suite e(nT) a comme transformée en z E(z) , en vertu du résultat précédent
e[(n-1)T] a comme transformée $z^{-1}.E(z)$ et a_1 .e[(n-1)T] $a_1.z_{-1}.E(z)$
de même à a_2.e[(n-2)T] correspond $a_2.z^{-2}.E(z)$

La transformée en z d'une suite qui est la somme de plusieurs suites étant évidemment la somme des transformées des différents termes, la transformée de la suite de sortie est :

$$S(z)= E(z) + a_1.z_{-1}.E(z)+ a_2.z^{-2}.E(z) = [1 + a_1.z^{-1}+a_2.z^{-2}].E(z)$$

C'est à dire que : $H(z) = 1 + a_1.z^{-1}+a_2.z^{-2}$

Cette notion de fonction de transfert en z s'applique également aux filtres récursifs. **Pour l'intégrateur** nous avions :

$$s(n)=s(n-1)+[e(n-1)+e(n)]/2 \qquad \text{(après normalisation T=1)}$$

La relation entre les transformées en z des suites qui interviennent est en vertu de ce qui précède :

$$S(z)=S(z)z^{-1} + ½[E(z)z^{-1}+E(z)]$$

Soit: $$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})}$$

C'est la fonction de transfert en z de l'intégrateur numérique .

La transformation en z est un outil très commode car elle permet de remonter immédiatement à l'algorithme de calcul.

Stabilité.

Un filtre numérique peut être instable , (dans le cas récursif seulement) . Soit par exemple le filtre de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

correspondant à l'algorithme s(n)=e(n)+2.s(n-1)
Introduisons à l'entrée la suite impulsion ne contenant qu'un seul terme non nul :

$$e(0)=1 \quad e(n\neq0)=0$$

Il vient s(0)=1+0=1
s(1)=0+2=2
s(2)=0+4=4
S(3)=0+8=8 , le signal de sortie augmente de façon exponentielle.

Cette instabilité est prévisible directement à partir de la fonction de transfert, elle dépend essentiellement de la position dans le plan complexe des racines du dénominateur, c'est-à-dire les pôles de la fonction de transfert.

Pour mettre en évidence ces pôles mettons la fonction de transfert sous la forme :

$$H(z) = \sum_k \frac{A_k}{1-\alpha_k z^{-1}}$$

les pôles sont les termes α

Injectons à l'entée une suite impulsionnelle 1 0 0 0 0 0 0 …..e(n)=δ(n)

La transformée de cette suite est bien sûr 1 La transformée de la suite de sortie est donc S(z)=H(z) .

Mais c'est aussi à un coefficient près la somme de la suite géométrique infinie

$$1+\alpha_k z^{-1} + \alpha_k^2 z^{-2} + \alpha_k^3 z^{-3} + ...$$

Posons $\alpha_k = \rho_k e^{j\theta_k}$ faisant apparaître le module et la phase du pôle. , la suite est divergente si le module est supérieur à 1 en effet dans ce cas le module des termes successifs tend vers l'infini . Soit le résultat important :

Un filtre numérique n'est stable que si tous les pôles de sa fonction de transfert en z sont dans le plan complexe à l'intérieur du cercle de rayon 1 .

FILTRES TRANSVERSAUX OU A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE (FIR)

Ce sont des filtres pour lesquels les coefficients b sont nuls, la sortie est calculée à partir d'un nombre fini d'échantillons d'entrée.

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{H} a_k x[(n-k)T]$$

H est l'horizon du filtre .

Réponse impulsionnelle

Le signal d'entrée est l'équivalent numérique de l'impulsion de Dirac utilisée pour les filtres analogiques .C'est la suite impulsionnelle :

d(n)= 1 0 0 0 0 0 0 0……….0 0 0 ……

Soit le filtre FIR décrit par :

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + ... + a_H s(n-H)$$

Sa réponse à la suite impulsionnelle est :

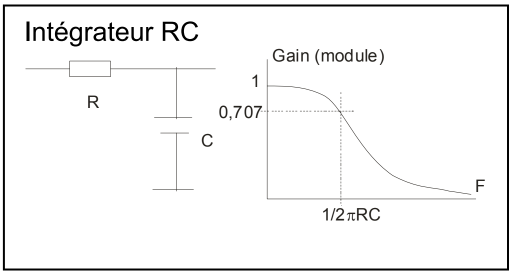
$$y(0) = a_0 d(0) = a_0$$
$$y(1) = a_1 x(0) + a_0 x(1) = a_1$$
$$y(n) = a_n x(0) + a_1 x(1) + ...+ = a_n$$

La suite de sortie n'est pas autre chose que la suite des coefficients . Cette propriété va nous permettre de déterminer les coefficients d'un filtre numérique correspondant à un filtre analogique.

Filtre intégrateur équivalent au RC passe bas

Le filtre intégrateur RC a comme fonction de transfert

$$H(j2\pi f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$



de fréquence de coupure $f_C = \frac{1}{2\pi RC}$

On connaît sa réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Il faut choisir la fréquence d'échantillonnage.
Si on veut par exemple 10 points par période à la fréquence de coupure (pour laquelle le gain est de -3dB) la période d'échantillonnage est :

$$T = \frac{2\pi RC}{10} = \frac{\pi RC}{5}$$

Pour respecter le théorème de Shannon la fréquence des signaux d'entrée doit rester inférieure à $\frac{1}{2T} = \frac{5}{2\pi RC}$

Les échantillons prélevés sur la réponse impulsionnelle sont :

$$h(kT) = \frac{1}{RC}\exp(-\frac{kT}{RC}) = \frac{1}{RC}\exp(\frac{-k\pi}{5})$$

L'algorithme du filtre est donc :

$$y(kT) = \frac{1}{RC}\left[x(kT) + \exp(-\pi/5).x[(k-1)T] + \exp(-2\pi/5).x[(k-2)T] + ...\right]$$

en prenant pour simplifier T comme unité de temps : $1 = \frac{\pi RC}{5} \quad soit \quad \frac{1}{RC} = \frac{\pi}{5}$

$$y(k) = \frac{\pi}{5}\left[x(k) + \exp(-\frac{\pi}{5})x(k-1) + \exp(-2\frac{\pi}{5})x(k-2) + ...\right]$$

on peut utiliser autant de coefficients que l'on veut.

Il faut maintenant évaluer le comportement de ce filtre en le comparant au filtre analogique qui a servi de modèle. Pour cela calculons la fonction de transfert isochrone en appliquant à l'entrée la « demi sinusoïde » exp(jωt).Alors :

$$y(n) = \sum_0^H a_k e^{j\omega(n-k)T}$$

c'est-à-dire

$$y(n) = e^{jn\omega T}\sum_k a_k e^{-jk\omega T}$$

La fonction de transfert isochrone est

$$H_N(j\omega) = \sum_k a_k e^{-j2\pi fkT} = \sum_k a_k[\cos 2\pi fkT - j\sin 2\pi fkT]$$

D'où en module et en phase :

$$|H_N(j2\pi f)| = \sqrt{\left(\sum_k a_k \cos 2\pi fkT\right)^2 + \left(\sum_k a_k \sin 2\pi fkT\right)^2}$$

$$tg\varphi(f) = -\frac{\sum_k a_k \sin 2\pi fkT}{\sum_k a_k \cos 2\pi fkT}$$

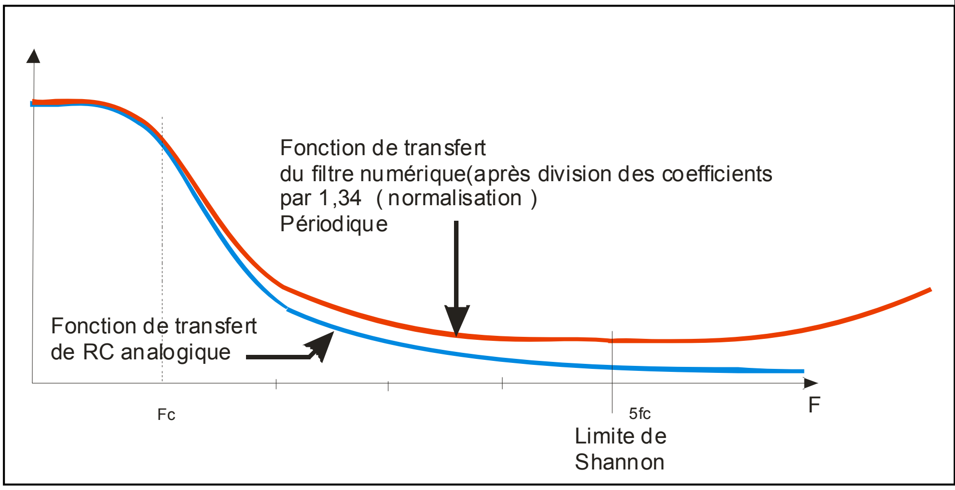
ces expressions sont facilement calculables sur une calculette programmable. .
Avec 5 coefficients :

On constate que la courbe est au dessus de celle du filtre analogique.

Le gain à fréquence 0 est 1,34 au lieu de 1 .On peut pour se rapprocher de l'analogique diviser tous les coefficients par ce 1,34 ; mais la courbe numérique reste au dessus de l'analogique car elle est périodique .

On peut montrer que ce coefficient 1,34 n'est pas du au nombre limité de coefficients , 5 seulement , mais au nombre trop faible de points sur la courbe entre le continu et la fréquence de coupure .

k	a_k
0	0 ,628
1	0,355
2	0,179
3	0,095
4	0,051



Filtres à phase linéaire

Un filtre numérique ne peut jamais être parfaitement équivalent à un filtre analogique mais il peut avoir des propriétés qui sont interdites à ce dernier.

En effet :

Si un filtre à une fonction de transfert réelle, il introduit pour toute fréquence un déphasage nul ,mais dans ce cas la réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à l'origine des temps. Un tel filtre est **irréalisable car non causal** . En effet :cette réponse impulsionnelle est :

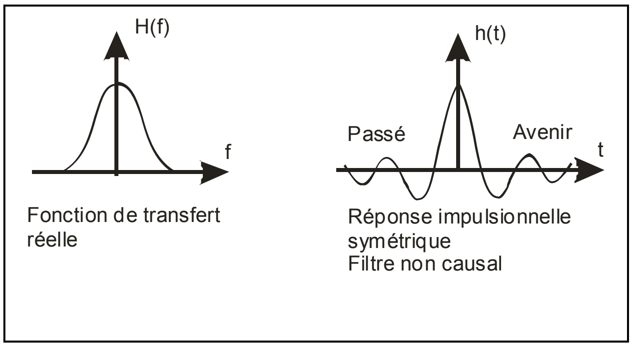
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j2\pi f)e^{j2\pi ft}df$$

mais on a toujours H(j2πf)=H*(-j2πf) et si H est réelle H(j2πf)=H(-j2πf)

Alors

$$h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(j2\pi f)e^{-j2\pi ft}df = h(t)$$

(il suffit d'effectuer le changement de variable f'=-f)



La réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à l'origine, elle a une amplitude qui décroît avec le temps . On procède alors à une troncature de façon à ce que la longueur soit finie et l'on décale la réponse de façon qu'elle soit celle d'un filtre causal.

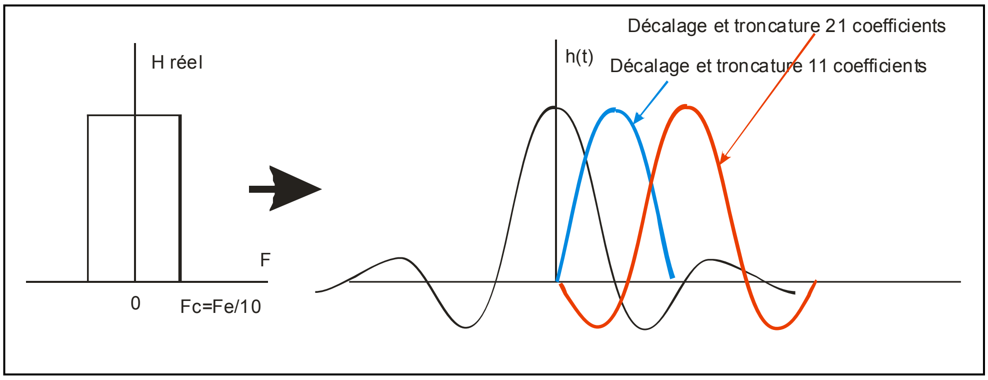
h(t) devient h(t-to) , sa transformée de Fourier est alors en vertu du théorème du retard H(j2πf)exp(-j2πfto) **la phase varie linéairement avec le temps.**

Exemple :

Nous cherchons à réaliser un filtre numérique qui se rapproche le plus possible d'un passe bas idéal dont le gain est constant du continu à la fréquence de coupure et nul au-delà. Nous choisirons une fréquence de coupure égale au 10eme de la fréquence d'échantillonnage .Soit :

$H(j2\pi f)=1$ pour $-|f|<Fe/10$
$H(j2\pi f)=0$ pour $|f| > Fe/10$

La fonction de transfert est une fonction rectangle (fonction porte) centrée sur l'origine .
La réponse impulsionnelle est transformée de Fourier d'une fonction rectangle soit :



h(0)	0,2
h(±1)	0,187
h(±2)	0,151
h(±3)	0,101
h(±4)	0 ,047
h(±5)	0
h(±6)	-0,031
h(±7)	-0,043
h(+8)	-0,038
h(±9)	-0,0210
h(+10)	0

$$h(kT) = \frac{1}{5T}\frac{\sin\frac{\pi k}{5}}{\frac{\pi k}{5}}$$

Numériquement ces coefficients sont présentés sur le tableau ci-joint.

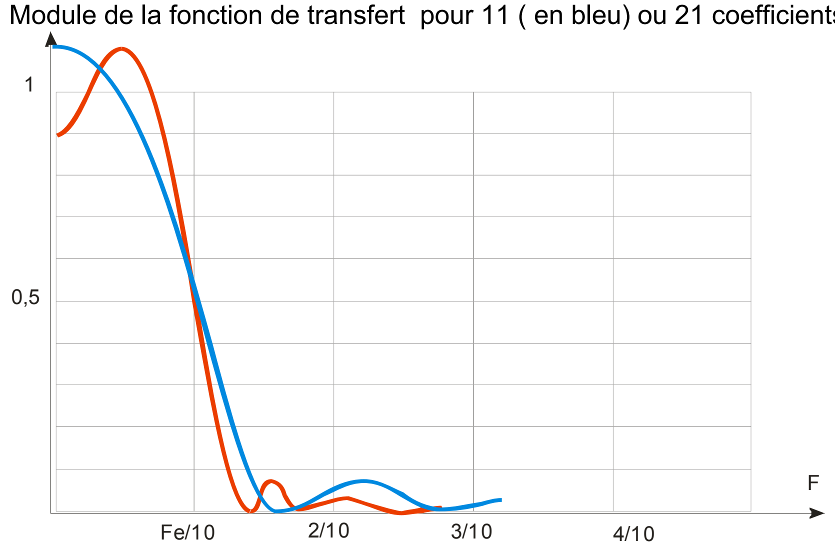
Si on effectue une troncature de la réponse impulsionnelle au premier zéro et que l'on décale la courbe pour rendre le filtre causal, il reste 11 coefficients (courbe en bleu) L'algorithme de définition du filtre est alors :

y(n)=0.x(n)+0,047 x(n-1)+0,101.x(n-2)+0,151.x(n-3)+………+0,2.x(n-5)+   +0.x(n-10)

Si l'on conserve les coefficients jusqu'au 10eme , il reste 21 coefficients et la courbe est celle tracée en rouge.

En utilisant les calculs présentés plus haut il est possible dans chaque cas de tracer la fonction de transfert isochrone obtenue.Les résultats sont présentés ci-dessous. Les courbes sont loin du gabarit analogique visé et ceci d'autant plus que le nombre de coefficients est faible. , mais le gain vaut ½ à la fréquence de coupure dans tous les cas. Le gain s'annule en plusieurs points dans la bande coupée et présente des ondulations dans cette zone. On retrouve ces oscillations dans la

Module de la fonction de transfert pour 11 (en bleu) ou 21 coefficients (en rouge)



majorité des filtres FIR .

Détermination des coefficients directement à partir de la fonction de transfert en ω

Les coefficients du filtre sont les valeurs prélevées sur la réponse impulsionnelle qui se calcule par :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j2\pi f)\exp(j2\pi f t)df$$

Pour obtenir les valeurs de h(t) en N points on remplacera cette intégrale par une sommation discrète effectuée à partir du même nombre de points répartis réguliérement sur la fonction de transfert H(j2πf) supposée réelle (c'est-à-dire son module) .

Prélevons donc sur H(f) N points répartis régulièrement dans la zone utile de fréquence +Fe/2 – Fe/2 donc distants de Δf = Fe/N

Les fréquences sont donc de la forme f = k Fe/N , si t=nT l'intégrale devient :

$$h(nT) = \frac{F_e}{N}\sum_{k=-(N-1)/2}^{k=+(N-1)/2} H(j2\pi k\frac{F_e}{N}).\exp(j2\pi k\frac{F_e}{N}.nT)$$

en normalisant à T=1 et en remarquant que H est symétrique par rapport à la fréquence nulle :

$$h(n) = \frac{1}{N}\left[H(0) + 2\sum_{k=1}^{(N-1)/2} H(k).\cos(2\pi k\frac{n}{N})\right]$$

Expression fournissant les coefficients cherchés à partir des points prélevés sur la fonction de transfert

Exemple : Reprenons le filtre passe bas idéal précédent de fréquence de coupure Fe/10 (10 points par période à la fréquence de coupure) .

Pour avoir un point à la fréquence nulle il faut un nombre de points impair, par exemple 11 répartis dans -0,5 < f/fe < +0,5 donc écartés de 1/11. Avec

H(0)=1
H(±1)=1
H(±2)=H(±3)+…=0

Les points sur la réponse impulsionnelle sont en appliquant la formule précédente :

$$\begin{cases} h(0) = \frac{1}{11}[1 + 2*1*\cos(2\pi 0)] = 0{,}272 \\ h(\pm 1) = \frac{1}{11}\left[1 + 2*\cos(2\pi\frac{1*1}{11})\right] = 0{,}243 \\ h(\pm 2) = \frac{1}{11}\left[1 + 2*1*\cos(2\pi\frac{1*2}{11}\right] = 0{,}166 \\ h(\pm 3) = 0{,}065 \\ h(\pm 4) = -0{,}028 \\ h(\pm 5) = -0{,}083 \end{cases}$$

pour réaliser un filtre causal à déphasage linéaire ces coefficients sont décalés à droite du zéro .

a_0=-0,083 a_1=-0,028 a_2= +0,065 …. a_5 = 0,272 ………

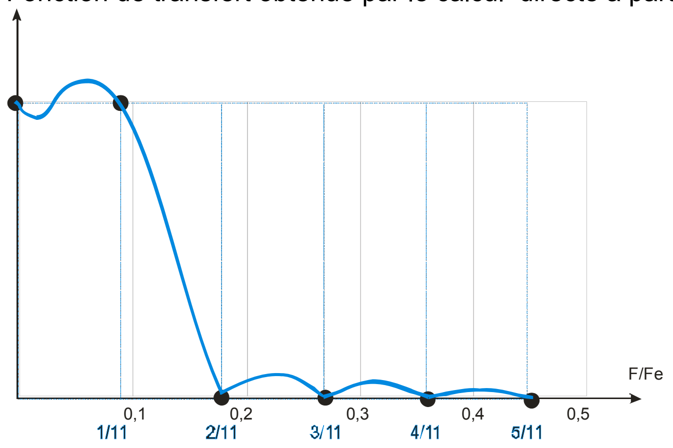
Le filtre est donc défini par :

y(n)=-0,083x(n)-0,028x(n-1)+0,065x(n-2)+……-0,028x(n-9)-0,083x(n-10).

La fonction de transfert numérique obtenue est représentée ci-dessous. On notera :
- Elle passe exactement par les points utilisés de la fonction de transfert analogique
- Entre eux elle présente des ondulations dont l'amplitude va en s'atténuant lorsque la fréquence augmente.

Pour se rapprocher le plus possible de la courbe analogique le plus simple est d'augmenter le nombre de coefficients.

Fonction de transfert obtenue par le calcul directe à partir de H(f)



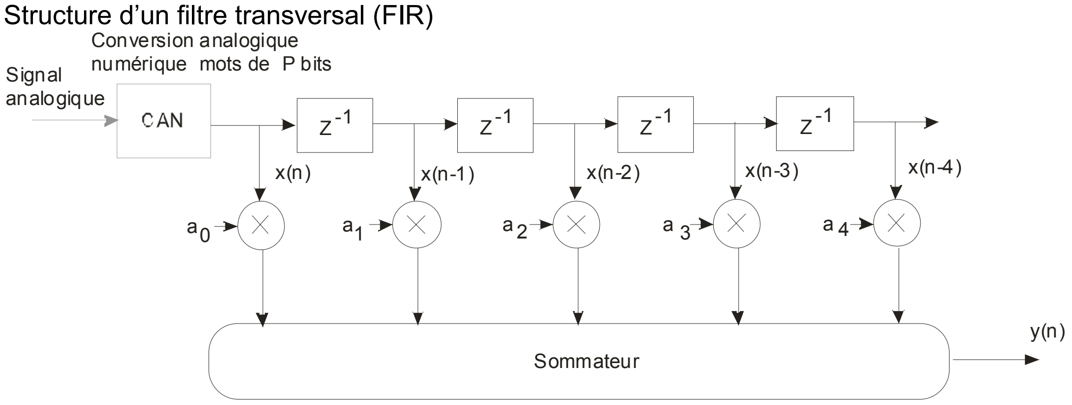
Réalisation des filtres transversaux

Un filtre FIR est constitué
- D'un plus ou moins grand nombre de cellules de retard permettant de disposer des signaux x[(n-k)T] à un instant nT

Il n'est pas absolument nécessaire que les signaux soient numériques , on a construit des filtres à partir de registres à décalage analogiques (CCD) , mais c'est un cas exceptionnel et rare .
- De multiplicateurs qui introduisent les coefficients
- Un circuit sommateur de sortie .

A cause de cette structure les filtres FIR sont souvent appelés filtres transversaux.

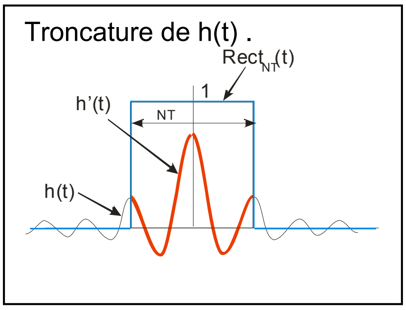
Structure d'un filtre transversal (FIR)



Atténuation des ondulations : Méthode des fenêtres

Pour se limiter à un nombre fini N de coefficients on est conduit dans tous les cas à tronquer la réponse impulsionnelle sur une durée NT (T étant la période d'échantillonnage.).Cette troncature peut être assimilée à la multiplication de la réponse impulsionnelle h(t) par une fonction rectangle . Le filtre dont on calcule ensuite l'équivalent numérique a donc en réalité une réponse impulsionnelle :

$$h'(t) = h(t) * Rect_{NT}(t)$$



Sa fonction de transfert est donc :

$$H'(j2\pi f) = H(j2\pi f) \otimes Rect_{NT}(f)$$

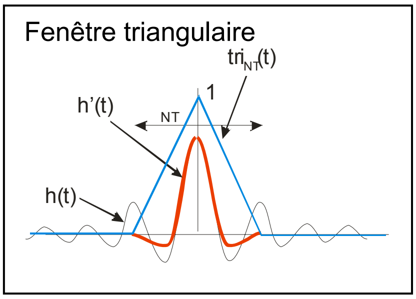
$rect_{NT}(f)$ étant la transformée de Fourier de la fonction rectangle c'est-à-dire (résultat bien connu, voir cours TDS) et $\otimes$ un produit de convolution .

$$Rect_{NT}(f) = NT \frac{\sin(\pi NTf)}{\pi NTf}$$

Cette fonction sinus cardinal possède de nombreuses oscillations à décroissance lente , et c'est son produit de convolution avec H(j2πf) qui est la cause des ondulations observées.

La méthode des fenêtres consiste à remplacer la fonction rectangle par une forme dont la transformée de Fourier est la moins ondulante possible.

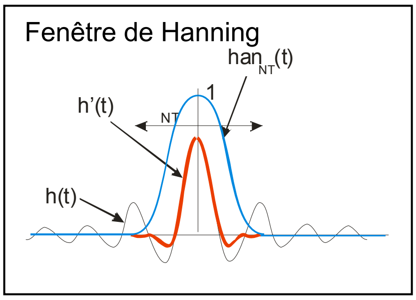
Fenêtre triangulaire –Fenêtre de Hanning



Le rectangle est remplacé par un triangle (figure ci contre) .Les coefficients sont prélevés sur la courbe $h'(t) = h(t) * tri_{NT}(T)$

La fonction triangle à comme transformée de Fourier le carré d'un sinus cardinal dont les ondulations au delà du lobe principal décroissent beaucoup plus vite que dans le cas précédent.

On peut trouver choquant de remplacer la vraie réponse impulsionnelle par une forme complètement différente, mais c'est le prix à payer pour compenser partiellement l'effet de la troncature.



Cette fenêtre très simple est rarement utilisée, d'autres formes ont été proposées dont la transformée de Fourier décroît beaucoup plus vite en dehors du lobe principal. C'est le cas par exemple de la fenêtre de Hanning qui est un cosinus sur-élevé (figure ci contre) .

Pour plus d'informations sur cette méthode consulter les ouvrages cités à la fin du chapitre Un petit utilitaire DOS fourni vous permettra de visualiser l'effet de ces fenêtres . (FILTRNUM.EXE)

LES FILTRES RECURSIFS

Nous avons vu plus haut que l'outil de base pour l'étude de ces filtres était la transformation en z .De plus à la différence des filtres transversaux ils peuvent être instables. Nous verrons que cette structure permet de se rapprocher du comportement d'un filtre analogique avec un faible nombre de coefficients , mais une grande précision sur ces coefficients est souvent nécessaire .

Pour passer d'une fonction de transfert en p à une fonction en z l'idéal serait de définir une transformation $p \rightarrow z$ mais la différence fondamentale de comportement des filtres numériques (la périodicité de leur fonction de transfert) interdit toute solution rigoureuse .

La description du comportement fréquentiel d'un filtre analogique est obtenue en faisant varier le paramètre p de 0 à l'infini sur l'axe imaginaire dans le plan complexe ($p = j\omega$)

Mais lorsque f varie de 0 à l'infini la variable $z=\exp(j2\pi f)$ décrit la partie supérieure d'un cercle de rayon 1 dans le plan complexe.

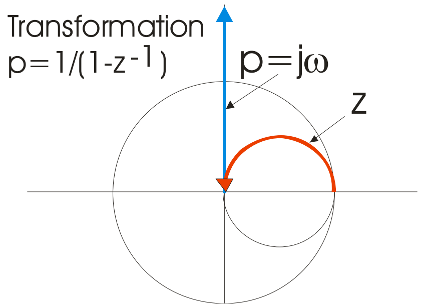
La transformation $z= f(p)$ devrait donc :

- Transformer le demi axe imaginaire en un demi cercle de rayon 1
- Transformer la partie droite du plan complexe en l'extérieur du cercle unité (de façon à conserver la stabilité)

Effectuons d'abord une recherche intuitive :

Nous avons vu que le différentiateur analogique $H(p)=p$ avait comme équivalent numérique un filtre de fonction de transfert en z $H(z)=1-z^{-1}$, on est donc tenté de proposer la transformation : $p = 1 - z^{-1}$ ou $z= 1/(1-p)$. Mais cette formule ne satisfait pas au critère précédent , en effet si p décrit l'axe imaginaire ($p=j\omega$) le point z décrit un demi cercle de rayon ½ centré en (1/2 – 0) .(figure ci contre)

Essai de transformation $z \Rightarrow 1/(1-p)$



Une meilleure transformation est obtenue en partant de l'intégrateur .

$$\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

soit :

$$p = 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ ou inversement } z = \frac{2+p}{2-p}$$

Si $p=j\omega$ (le point p décrit l'axe imaginaire) $z = \dfrac{2+j\omega}{2-j\omega}$ est de module 1 , le point z est donc bien sur le cercle de rayon 1 . Il faut remarquer que cette propriété est conservée si le 2 est remplacé par un nombre quelconque K .C'est la **transformation bilinéaire** définie par la relation :

$$\begin{cases} p = K\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ z^{-1} = \dfrac{K-p}{K+p} \end{cases}$$

Malheureusement si z a bien un module 1 , il n'a pas la bonne phase . En effet en régime harmonique , si ω_o est la fréquence de normalisation :

$$p = j\frac{\omega}{\omega_0}$$

alors $z = \dfrac{k + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{k - j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ a pour argument $\arg(z) = 2\, arctg\dfrac{\frac{\omega}{\omega_0}}{K}$

mais par définition $z = \exp(j2\pi fT)$ c'est-à-dire $\arg(z) = 2\pi fT = 2\pi\dfrac{f}{f_e}$ f_e étant la fréquence d'échantillonnage

Une identité parfaite entre filtre analogique et numérique ne serait possible que si ces deux expressions de arg(z) étaient égales :

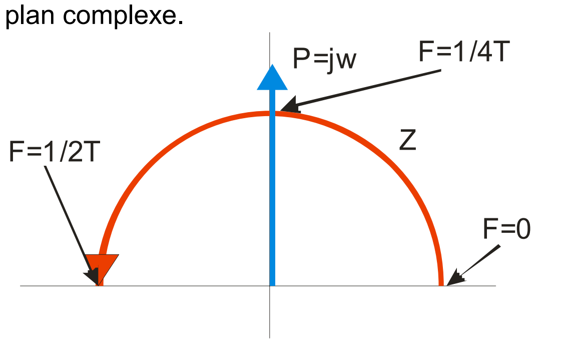
$$2\ arctg\left(\frac{\frac{f}{f_O}}{K}\right) = 2\pi\frac{f}{f_e}$$

or cette égalité ne peut pas être satisfaite pour toute fréquence . Pour un filtre donné nous seront amenés à choisir le paramètre K de façon qu'il y ait identité pour une seule fréquence choisie en fonction des caractéristiques du filtre.

En désignant par f les fréquences mesurées sur la fonction de transfert analogique et f_N sur le filtre numérique, les formules de la transformation bilinéaire sont alors :

$$\begin{cases} K = \dfrac{\frac{f}{f_O}}{tg\pi\frac{f_N}{f_e}} \\ f = Kf_0\ tg\dfrac{\pi f_N}{f_e} \\ f_N = \dfrac{f_e}{\pi}arctg\dfrac{\frac{f}{f_0}}{K} \end{cases}$$

Transformation bilinéaire .Trajet de z dans le plan complexe.



Exemple :
Intégrateur RC

L'intégrateur RC qui nous a sevi de premier exemple a comme fonction de transfert normalisée :

$$H(p) = \frac{1}{p+1}$$

ou en introduisant la fréquence de coupure f_o $H(j2\pi f) = \dfrac{f_0}{jf + f_0}$

En remplaçant p par son expression en z conformément à la transformation bilinéaire , la fonction de transfert en z est :

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+K)+(1-K)z^{-1}}$$

reste à déterminer le coefficient K.
Avec la transformée bilinéaire les filtres analogique et numérique sont équivalents à la fréquence nulle , (ils ont en continu un déphasage nul) et pour une autre fréquence qui dépend de K .

Nous choisirons cette seconde valeur à la fréquence de coupure fo .
Imposons nous d'abord cette fréquence fo = 1000Hz et un échantillonnage de 10 points par période à cette fréquence , c'est-à-dire une fréquence d'échantillonnage de 10kHz.

La fréquence de coupure du filtre numérique est le 10eme de sa fréquence d'échantillonnage soit $f_N = \dfrac{f_e}{10}$ et il lui correspond pour le filtre analogique $\dfrac{f}{f_0} = 1$. En reportant ces valeurs dans l'expression de K de la page précédente :

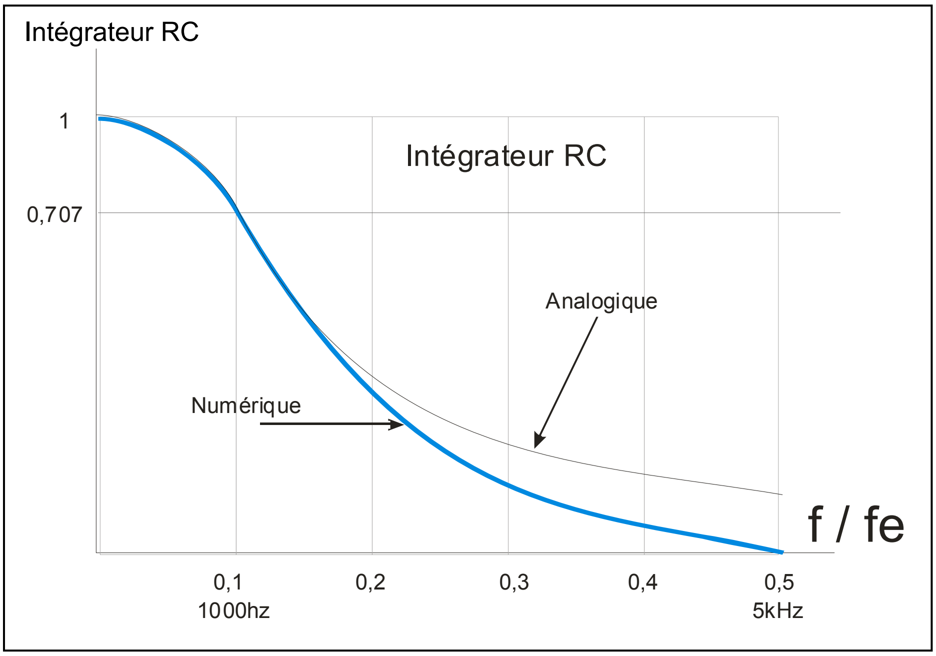
$$K = \frac{1}{tg\,\pi/10} = 3{,}077$$

d'où la fonction de transfert finale :

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{4{,}077 - 2{,}077z^{-1}}$$

En remplaçant z par son expression en ω il est facile comme plus haut de tracer le module de la fonction de transfert isochrone obtenue.

Elle est confondue avec le tracé analogique pour le continu et à la fréquence de coupure , mais s'en éloigne ensuite, le gain est par exemple nul à la limite de Shannon f=fe/2



Attention ce filtre n'est pas à déphasage linéaire.

Passe bas du second ordre

La fonction de transfert normalisée en p est : $H(p) = \dfrac{1}{1+Q(p+\dfrac{1}{p})}$

La transformation bilinéaire fournit une transformée en z :

$$H(z) = \frac{K(1-z^{-2})}{z^{-2}[Q(K^2-1)-K] - 2Q[K^2-1]z^{-1} + [K+Q(K^2+1)]}$$

Nous considérerons un filtre de coefficient de qualité Q=10 , centré à 1000 Hz , avec une cadence d'échantillonnage telle qu'il y ait 10 poins par période à cette fréquence c'est-à-dire 10kHz .

Si comme c'est logique nous cherchons à identifier analogique et numérique à la fréquence centrale le coefficient K prend la même valeur que dans l'exemple précédent K=3,077 .

En effectuant le calcul de la fonction de transfert isochrone obtenue on constate que la bande passante à -3dB n'est pas de 100Hz comme le Q de 10 l'imposerait. Ceci est une conséquence de la distorsion introduite par la transformation bilinéaire .

Pour un Q de 10 le gain doit être de -3dB à 950 et 1050Hz .(exactement 951,25 et 1051,25)

Mais à une fréquence de 950 Hz sur le filtre numérique correspond une fréquence analogique (en utilisant une des formules du paragraphe précédent)

$$f = 3{,}077 * 1000 * tg(\frac{\pi * 950}{10000}) = 946{,}61$$

De même à 1050 Hz sur le filtre numérique correspond une fréquence analogique de 1053,7Hz . Le Q du prototype analogique doit donc être :

$$Q_A = \frac{10000}{(1053{,}7 - 946{,}61)} = 9{,}355$$

C'est cette valeur de Q qui doit être utilisée dans le calcul .Il vient finalement :

$$H(z) = \frac{3{,}077 - 3{,}077z^2}{94{,}850z^{-2} - 158{,}43z^{-1} + 101}$$

Au voisinage de la fréquence centrale les tracés analogiques et numériques sont presque indiscernables.

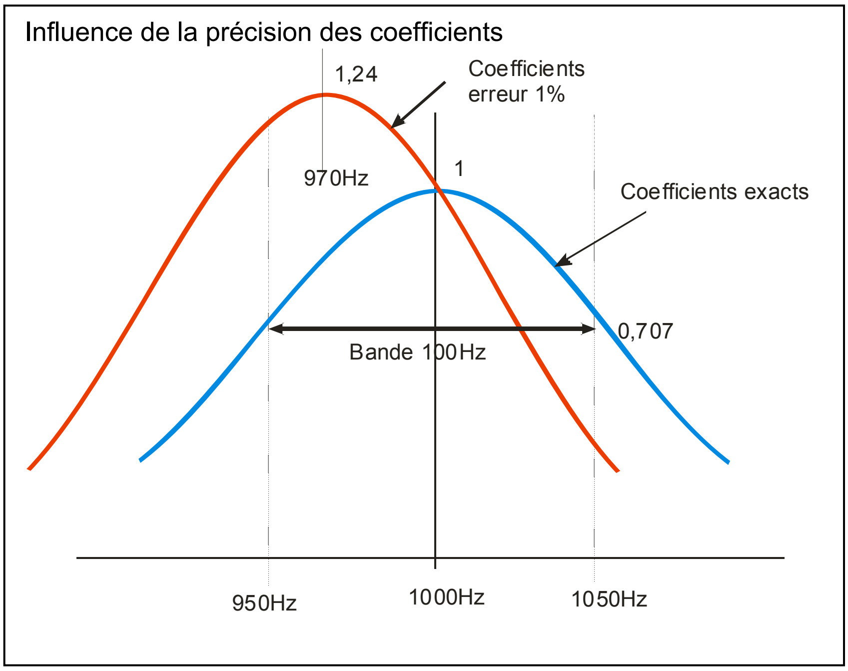
On notera pour terminer que si le nombre de coefficients est faible , leur valeur numérique doit être précise. Et ceci d'autant plus que le Q est élevé. Les pôles de la fonction de transfert en z sont d'autant plus proches du cercle de rayon 1 que Q est grand et une erreur sur les coefficients peut les faire passer à l'extérieur de ce cercle ce qui provoque une instabilité.

Une erreur sur les coefficients a en général une influence importante sur la fonction de transfert, à la différence des filtres analogiques pour lesquels une précision de 5% sur la valeur des composants R ou C est souvent suffisante. En conséquence les coefficients du filtre et les calculs doivent être effectués avec des nombres définis sur un grand nombre de bits , 16 au moins . Nous ne développerons pas ce point pourtant très important .

A titre d'exemple reprenons le filtre précédent mais en arrondissant les valeurs numériques des coefficients , l'erreur commise est de l'ordre de 1%. La fonction en z est alors :

$$H(z) = \frac{3{,}1(1 - z^{-2})}{95z^{-2} - 160z^{-1} + 100}$$

On constate en effectuant le calcul que l'erreur sur la courbe est bien supérieure à 1%, l'amplitude à l'accord passe de 1 à 1,24 (24%) et la fréquence centrale de 1000 à 970Hz



Structure des filtres récursifs

Les filtres numériques sont implantés sous forme de programme dans un ordinateur. Les valeurs des échantillons ainsi que les coefficients sont stockés en mémoire. .

Soit par exemple un filtre récursif du second ordre .

$$H(z) = \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}$$

il correspond à l'algorithme :

$$y(n) = -cy(n-1) - dy(n-2) + x(n) + ax(n-1) + bx(n-2)$$

il faut gérer en mémoire la table des x(n) mais aussi celle des y(n) .Or si l'on pose :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} \cdot \frac{W(z)}{X(z)}$$

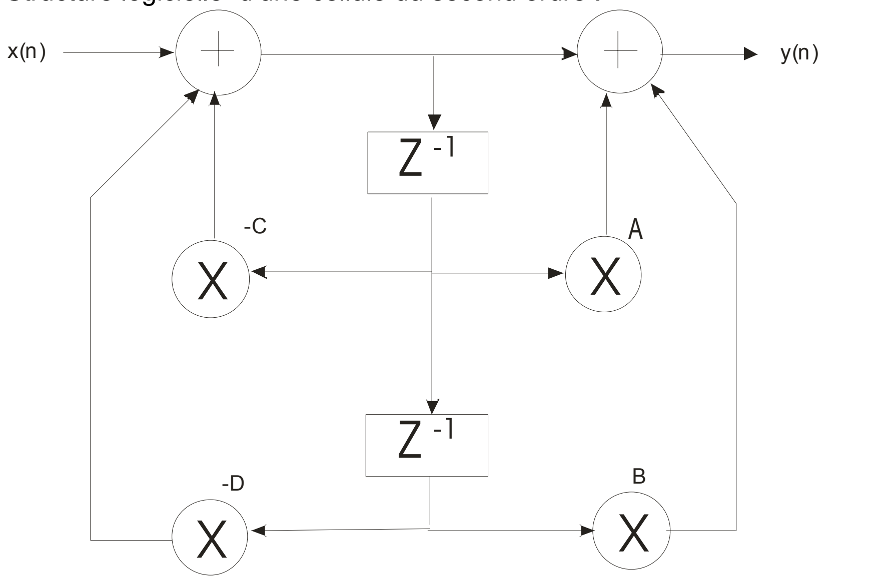
avec $:\frac{Y(z)}{W(z)} = 1 + az^{-1} + bz^{-2} \quad et \quad \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}$

On obtient :

w(n)=x(n)-cw(n-1)-dw(n-2)
y(n)=w(n)+a.w(n-1)+b.w(n-2)

Seules les valeurs de w doivent être gérées en mémoire. .

Structure logicielle d'une cellule du second ordre .



Bibliographie

Un bon ouvrage d'introduction :
P Fondaneche et P Gilbertas Les Filtres Numériques MASSON 1981

Plus complet
R Boite et H Leich Les filtres numériques
MASSON 1980

Pratique du Filtrage J AUVRAY Techniques de L'Ingénieur 2002