

## LES FONCTIONS BINAIRES ORTHOGONALES WALSH - HADAMAR - PALEY

### Définitions

Ce sont des fonctions réelles n'ayant que deux états +1 et -1, elles sont définies dans l'intervalle  $-1/2 + 1/2$

Les fonctions de Walsh sont décrites par l'expression algébrique :

$$W(k, t) = \prod_{i=0}^{r-1} \text{Sign}[\cos^{k_i}(2^i \pi t)]$$

avec  $r = \text{Partie Réelle}(\text{Log}_2(k) + 1)$

k est l'indice de la fonction de Walsh,  $k_i$  le  $i$ ème bit du nombre k écrit en binaire

Par exemple pour  $k=6$   $\log_2(6)=2,58$  donc  $r=3$ , d'autre part  $6=110$  en binaire donc  $k_0=0$   $k_1=1$   $k_2=1$

$$\text{Soit } W(6, t) = \text{Sign}[(\cos 1\pi t)^0] \cdot \text{Sign}[(\cos 2\pi t)^1] \cdot \text{Sign}[(\cos 4\pi t)^1]$$

C'est à dire

Les fonctions de Walsh peuvent également être créées à partir de certaines matrices de Hadamar. Ces matrices sont construites de la façon suivante :

$$H_1 = [1]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et de façon générale

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$$

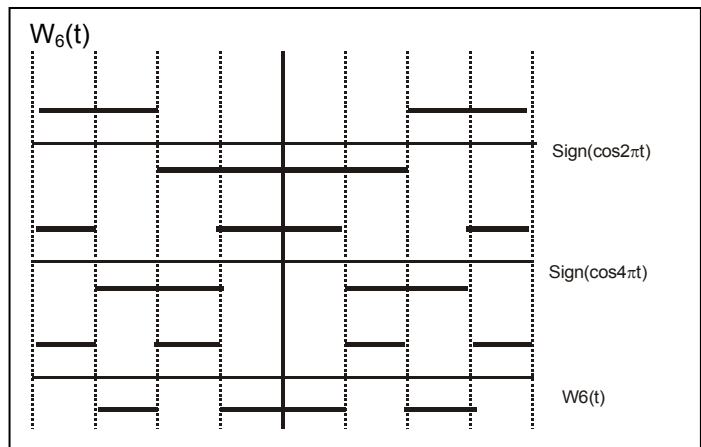
$$\text{Ainsi : } H_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice matérialise une fonction de Walsh. Son indice k est le nombre de fois que le tracé coupe l'axe des temps (ou le nombre de transitions  $\pm 1$ )

Il est facile de vérifier que deux fonctions d'indices différents sont orthogonale c'est à dire que leur produit scalaire :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} W(k, t) \cdot W(j, t) dt = \delta_{kj}$$



$$H_{16} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

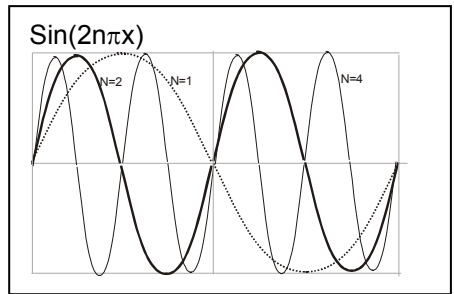
**Séquence .**

On définit pour les fonctions de Walsh une grandeur analogue à la fréquence d'une sinusoïde.

Considérons en effet une fonction sinusoïdale  $\sin(2n\pi x)$ , représentée également dans l'intervalle  $\pm 1/2$ , elle est de fréquence n.

Comptons le nombre de fois que la courbe coupe l'axe des temps, en ne comptant qu'une fois les intersections aux extrémités ( $\pm 1/2$ )

- Sin( $2\pi x$ ) coupe l'axe 2 fois
- Sin( $2\pi 2x$ ) coupe l'axe 4 fois
- Sin( $2\pi 8x$ ) le coupe 8 fois ,



ainsi :

$$\text{Fréquence } n = (\text{nombre de coupure de l'axe des temps}) / 2$$

Cette même définition va nous permettre de définir pour une fonction de Walsh la **séquence z** .Le nombre de transitions étant n l'indice de la fonction :

**Séquence z =Partie Entière de n/2**

Les fonctions dont l'indice est pair sont paires, comme les cosinus, on les appelle Cal  
 Les fonctions d'indice impair sont impaires on les appelle sal

$$\begin{aligned} \text{Wal}(2n) &= \text{Cal}(n) \\ \text{Wal}(2n+1) &= \text{Sal}(n) \end{aligned}$$

**Relations entre les fonctions de Walsh**

Il existe de nombreuses relations entre les fonctions cal et sal qui rappellent les formules trigonométriques. Nous citerons seulement :

$$\text{Wal}(k,t) \cdot \text{Wal}(l,t) = \text{Wal}(k \oplus l, t)$$

Le signe  $\oplus$  est une sommation modulo 2 entre les nombres k et l écrits en binaire. Par exemple :  
 $\text{Wal}(4,t) \cdot \text{Wal}(6,t) = \text{Wal}(1,t)$

En effet bit à bit  $100 \oplus 101 = 001$

Les matrices de Hadamar font apparaître les fonctions de Walsh dans un ordre qualifié de Naturel. Pour passer de l'ordre naturel (le numéro de la ligne de la matrice ) au coefficient k de la fonction de Walsh il faut :

- Transcoder le numéro naturel en code binaire
- Inverser le nombre obtenu
- Lire le résultat en binaire réfléchi (code Gray)

Soit :

Ordre Naturel	En Binaire	Inversé	Soit n
0	0000	0000	0
1	0001	1000	15
2	0010	0100	7
3	0011	1100	8
4	0100	0010	3
5	0101	1010	12
6	0110	0110	4
7	0111	1110	11

Code Gray		
Nombre décimal	Nombre binaire	Code Gray
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110°
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Il est important de noter qu'une fonction de Walsh possède un indice indépendant de l'ordre de la matrice de Hadamar d'ou elle est issue. Wal(6,t) est la 6eme ligne de H8 ou la 11eme de H16 . C'est ce qui distingue comme nous le verrons plus loin les fonctions de Walsh des fonctions de Hadamar ou de Paley.

## Fonctions de Walsh à indice non entier ; transformation intégrale de Walsh

Il est possible de définir des fonctions de Walsh dont les indices ne sont pas entiers, la encore nous utiliserons une analogie avec les fonctions circulaires.

Soit la fonction  $\sin(2\pi \cdot 1/2x)$  elle à pour fréquence  $1/2$  , mais en posant  $x'=x/2$  elle s'écrit aussi  $\sin(2\pi x')$ .C'est donc une fonction qui a la même forme que  $\sin(2\pi x)$  mais définie dans un intervalle 2 fois plus grand. ( $\pm 1$  pour x)

De même  $\sin(2\pi 4/7x)$  s'écrit en posant  $x'=x/7$   $\sin(2\pi 4x')$  elle a la forme de  $\sin(2\pi 4x)$  mais dans un intervalle 7 fois plus large (de  $-3,5$  à  $+3,5$  pour x )

De façon générale  $\sin(2\pi p/qx)$  à la forme d'une sinusoïde de fréquence p définie dans un intervalle  $\pm q/2$  .

Le même raisonnement appliqué aux fonctions de Walsh permet de définir  $Wal(p/q)$  comme une fonction ayant la forme de  $Wal(p)$  mais étalée sur un intervalle  $\pm q/2$  .

Les fonctions de Walsh à indice fractionnaire sont définie dans un intervalle plus large que  $\pm 1/2$  , si l'indice n'est pas fractionnaire cet intervalle tend vers l'infini .

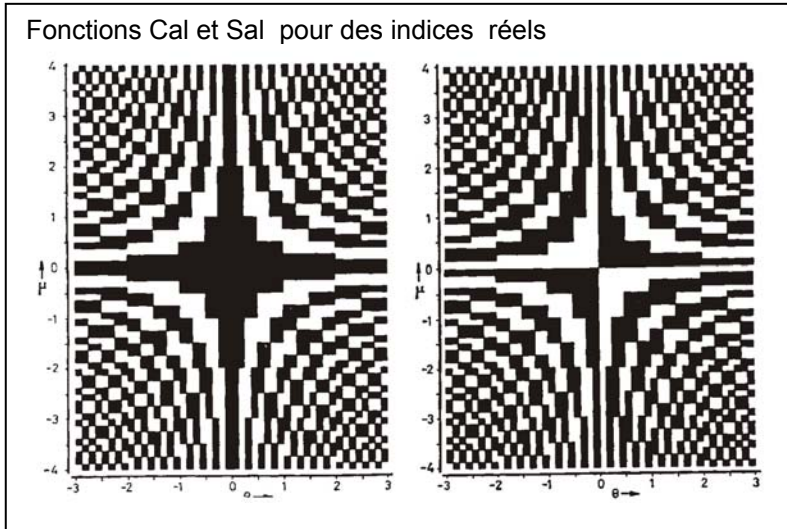
$Wal(0,0123) = Wal(123/10000)$  à la forme de  $Wal(123)$  mais une largeur totale 10000.

A la limite on peut donc définir des fonctions de Walsh pour un indice réel  $\mu$  quelconque , une fonction de t est alors développée sur cette base et l'on écrit :

$$f(t) = \int_0^{\infty} F_w(u).Wal(\mu,t)d\mu$$

Pour plus de détails consulter l'ouvrage indiqué ci dessous .

Bibliographie : Transmission of information by Orthogonal Functions  
Henning F Hartmuth Springer-Verlag Berlin 1972



La figure ci contre représente les fonctions Cal et Sal pour des indices réels de -4 à +4 et t variant dans ±3

Pour tracer une fonction Wal(μ,t) il suffit de tracer une horizontale dont l'ordonnée est l'indice μ choisi .

( tiré de l'ouvrage cité plus haut)

## Interêt de la transformation de Walsh

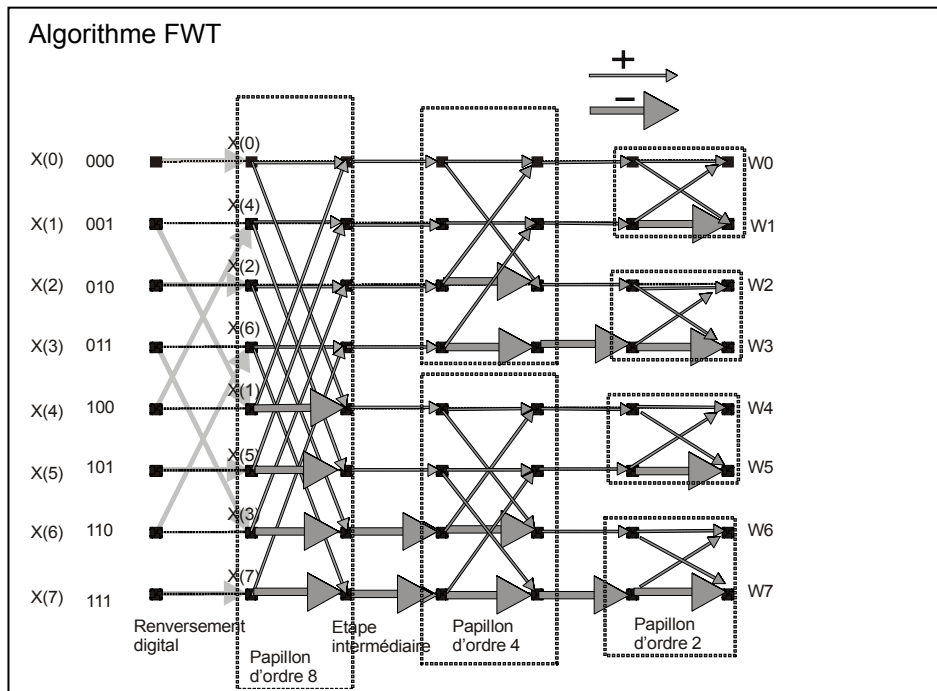
Toute fonction du temps définie dans l'intervalle ±1/2 peut être développée sur la base de Walsh :

$$f(t) = \sum_k a_k Wal(k, t) \quad \text{avec} \quad a_k = \int_{-1/2}^{+1/2} f(t).Wal(k, t) dt$$

La transformation de Walsh est dans certains cas être utilisée à la place de la transformée de Fourier, elle n'en a pas les propriétés car les fonctions de Walsh ne sont pas fonctions propres de l'opérateur linéaire, mais la transformation est bien plus rapide car :

- Toutes les opérations s'effectuent avec des nombres réels
- Il n'y a pas de multiplications sinon par ±1
- Il n'y a qu'additions ou soustractions .

Comme pour Fourier il existe un algorithme de calcul rapide FWT ( Fast Walsh Transform ) dont l'algorithme est reproduit ci dessous :



Cet algorithme comporte d'abord un renversement digital qui est nécessaire pour obtenir en sortie les transformées dans le bon ordre ( celui des indices n ) Il est suivi d'un papillon et d'une étape intermédiaire . C'est lors de cette étape qu'apparaissent dans la FFT les termes exponentiels qui ici ne sont plus que  $\pm 1$ .

## Construction physique des fonctions de Walsh

Il est très facile de construire des générateurs de fonctions de Walsh (elles sont alors périodiques ) Ces générateurs exploitent la relation d'addition précédente  $Wal(k).Wal(l)=Wal(k\oplus l)$  et les **fonctions de Rademaker**

Les fonctions de Rademaker définies elles aussi sur  $\pm 1/2$  sont les sorties d'un compteur binaire .

Ce sont aussi les fonctions de Walsh d'indice  $2^n - 1$   
 $Wal(1),Wal(3),Wal(7),Wal(15),Wal(31),...$

Elles sont facilement obtenues aux sorties d'un compteur binaire

En les combinant il est possible de construire n'importe quelle fonction de Walsh .

Soit par exemple à construire  $Wal(23,t)$

En binaire 23 s'écrit :

$$10111 = 11111 \oplus 01000$$

mais

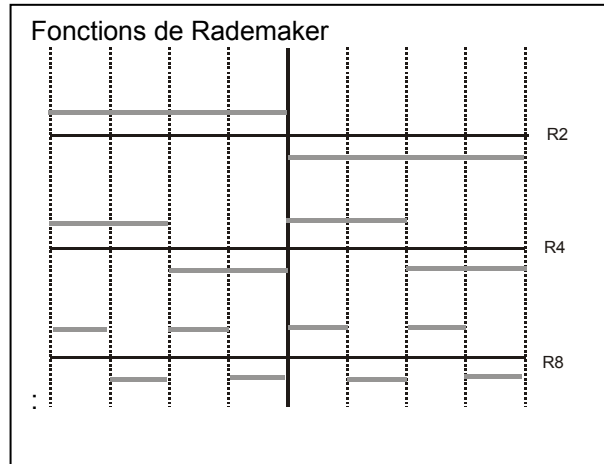
$$1000 = 1111 \oplus 0111$$

Soit symboliquement :

$$23 = 31 \oplus 15 \oplus 7$$

Donc  $Wal(23)=Wal(31).Wal(15).Wal(7)$

Reste à effectuer le produit.



Les fonctions de Walsh n'ont que deux niveaux  $\pm 1$ , mais la table de multiplication peut être comparée à la table du ou exclusif :

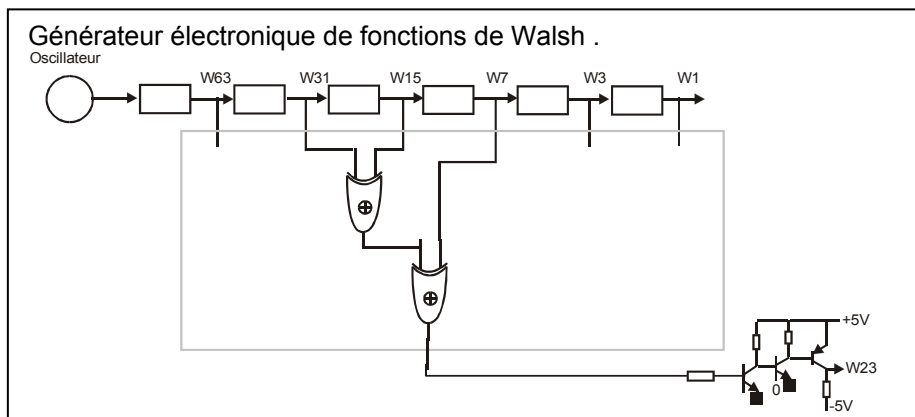
+1	+1	+1
+1	-1	-1
-1	+1	-1
-1	-1	+1

On observe alors quel le 0 logique joue le rôle du +1, le 1 logique le rôle du -1 . A la sortie des bascules les niveaux logiques peuvent être combinés par des OU exclusifs . Ce qui donne pour 23 le schéma suivant :

0	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1

La zone entourée d'un trait gris peut être remplacée par un circuit programmable permettant par logiciel de choisir la combinaison , donc la fonction de Walsh souhaitée.

Il est suivi d'un étage permettant de reconstituer les niveaux  $\pm 1$



## Fonctions de Hadamar et Paley

Ce sont les mêmes fonctions que Walsh mais numérotées différemment .

Pour les **fonctions de Hadamar** l'indice et le numéro de la ligne de la matrice. Cet indice est donc dépendant de l'ordre de la matrice choisie Har(3) pour un ensemble de 8 fonctions (définies par H8 ) n'est pas la même fonction que Har(3) dans un ensemble de 16 définies par H16.

Ces fonctions sont obtenues par l'algorithme précédent mais en supprimant renversement digital et étapes intermédiaires .

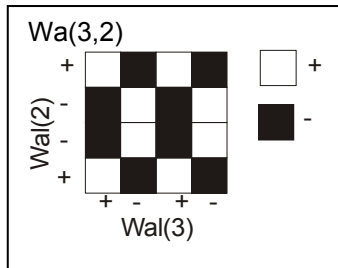
**Les fonctions de Paley** sont obtenues avec le même algorithme que pour Hadamar mais en conservant le renversement digital préalable .

Leur calcul est donc plus rapide mais leur indice est fonction de la taille de la matrice génératrice .

## Fonctions de Walsh Bidimensionnelles

Elles sont utilisées en traitement d'image .

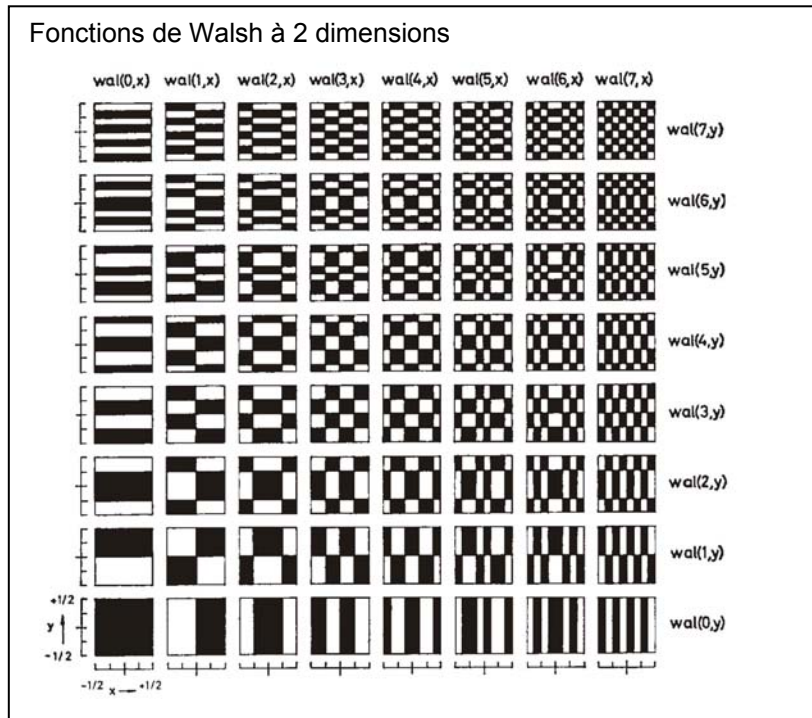
Wal(j,k) est représentable par un carré dont chaque case est le produit de l'abscisse et de l'ordonnée qui sont les fonctions de Walsh unidimensionnelles Wal(j) et Wal(k)



Pour une image  $i(x,y)$  la transformée est :

$$W_I(j,k) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} i(x,y).Wal(j,x).Wal(k,y)dx dy$$

La figure suivante représente les premières fonctions bidirectionnelles .



**Note** En codage d'image cette dernière est en général découpée en zones de 8x8 pixels, la transformée de Walsh pourrait être calculée extrêmement vite, mais compte tenu du faible nombre de points une transformée de Fourier peut être obtenue presque aussi rapidement .

En réalité en télévision (codage JPEG ou MPEG ) ce n'est pas une transformée de Fourier classique qui est employée mais une **transformation en cosinus discrète** (DCT).

Cette transformation est définie pour un bloc de NxN pixels par les deux équations :

$$DCT(i, j) = \frac{1}{\sqrt{2N}} C(i).C(j) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} pixel(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)j\pi}{2N}\right]$$

et inversement

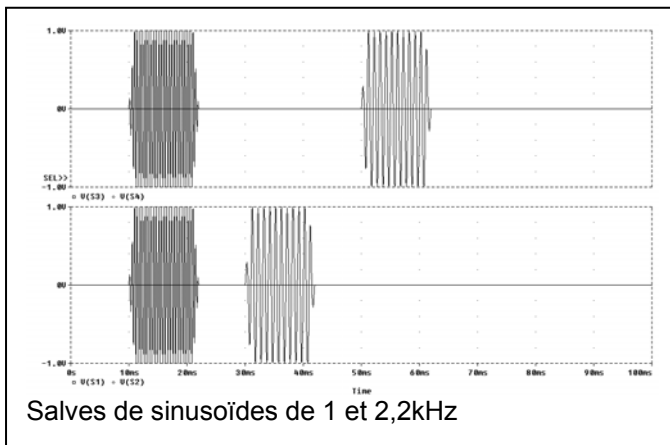
$$pixel(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} C(i).C(j).DCT(i, j) \cos\left[\frac{(2x+1)j\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)j\pi}{2N}\right]$$

$$et \quad C(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C(k \neq 0) = 1$$

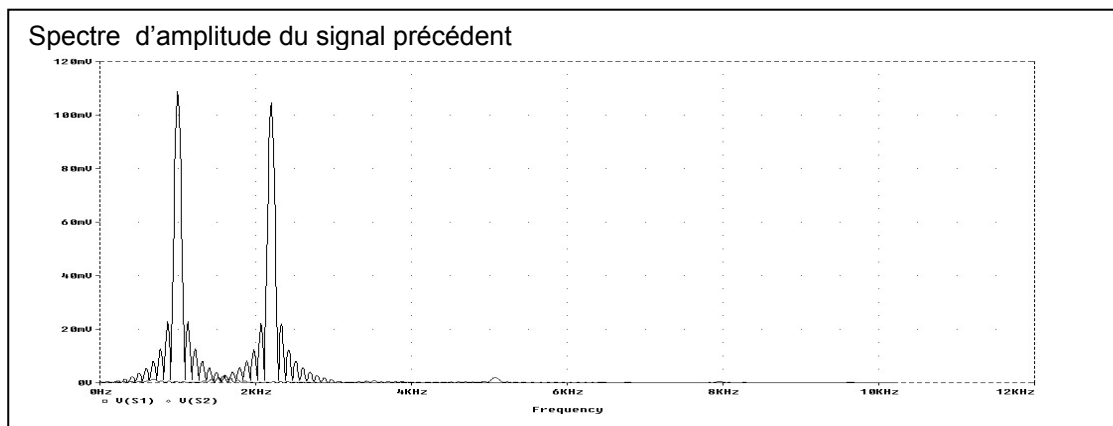
## Analyse temps fréquence transformée de Fourier à fenêtre glissante- transformée en Ondelettes

### Transformée de Fourier à fenêtre glissante .

La transformée de Fourier classique présente de grosses lacunes, elle est en particulier mal adaptée à l'analyse d'un signal non stationnaire . Si par exemple un signal est constitué de deux salves de sinusôides de fréquences f1 et f2 , son spectre est localisé autour de ces deux valeurs mais la position des salves dans le temps est indiquée de façon beaucoup plus discrète . Cette position est codée par la phase de la transformée, or cette dernière disparaît pour un spectre de puissance . Ainsi pour un signal aléatoire qui ne possède qu'un spectre de puissance aucune information sur la répartition temporelle du signal n'est obtenue par transformée de Fourier ..



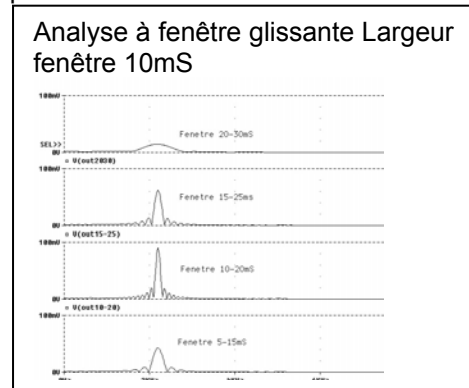
La figure ci contre représente de tels signaux et ci dessous leur spectre . Il est rigoureusement le même dans les deux cas ( seul le module est tracé )



Pour résoudre ce problème la première idée qui a été exploitée est **la transformée de Fourier à fenêtre glissante** .Le signal est découpé en blocs successifs de durée fixe T dont on fait

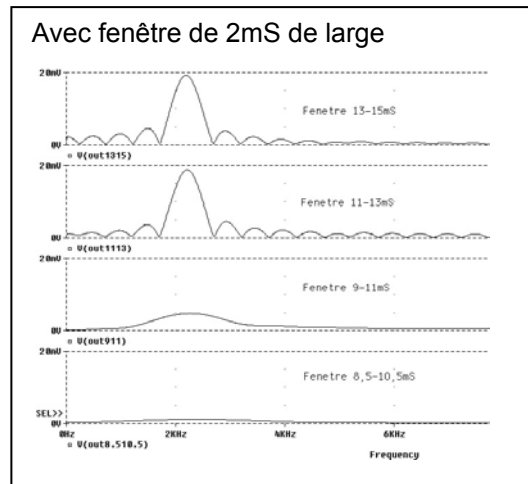
la transformée de Fourier. Ainsi la composante de fréquence 1kHz du signal précédent n'apparaît que si la salve correspondante se trouve dans la fenêtre. Le résultat du calcul comprend autant de spectres qu'il y a de positions de la fenêtre. Il y a malheureusement un problème car le résultat dépend beaucoup de la largeur choisie pour cette dernière. Si elle est trop large la position d'une salve est mal connue, si elle est trop étroite le spectre est très élargi et l'information fréquence est en partie perdue. Plus la fenêtre est étroite et plus le positionnement est précis mais plus grande est l'incertitude sur la fréquence.

Dans l'exemple ci dessous le signal est une salve de sinusoides de fréquence 2,2kHz située entre les instants 10 et 22mS. La fenêtre d'analyse est une porte carrée de 10mS de large placée respectivement à partir de 5-10-15 et 20mS. Les spectres obtenus ont bien un maximum pour la position 10mS mais la détermination de la position du début de la salve est très grossière.



Pour augmenter la précision du positionnement nous utilisons ensuite une fenêtre de 2mS de large seulement. Pour une position de 8,5-9-11-13mS les résultats sont présentés ci dessous.

Dans ce cas les spectres ont même amplitude pour les positions 11 et 13 bien sûr mais les lobes sont beaucoup plus



larges ce qui rend la détermination de la fréquence moins précise.

Si la fenêtre est déplacée de façon continue le résultat est un graph à 3 dimensions, position, fréquence, amplitude.

La fenêtre n'est pas nécessairement rectangulaire, elle peut prendre la forme d'une fenêtre de Hamming, Hanning etc...

En réalité il faudrait à la fois déplacer la fenêtre et en modifier la largeur, le résultat est alors une grandeur à 4 dimensions Position-Largeur fenêtre – fréquence-amplitude (qu'en toute rigueur est complexe) dont l'exploitation est difficile.

Cette difficulté est levée avec les transformations en ondelettes.

### Transformée en ondelette.

Cette fois toute relation avec une transformation de Fourier est exclue. Le signal est comparé à une forme analysante, **ondelette analysante**, de moyenne nulle. Plusieurs formes d'ondelettes analysantes sont utilisées :

Chapeau Mexicain : La dérivée seconde d'une gaussienne :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left( e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \right)$$

Ondelette de Morlet

$$\Psi(t) = e^{iat} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma}} \text{ de partie réelle } \cos(at) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma}\right)$$

Une ondelette dépend de deux paramètres, sa largeur  $s$  et sa position  $\tau$

$$\Psi_{\tau,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

à la forme de  $\Psi$  est centrée en  $t=\tau$  et d'autant plus large que  $s$  est petit.

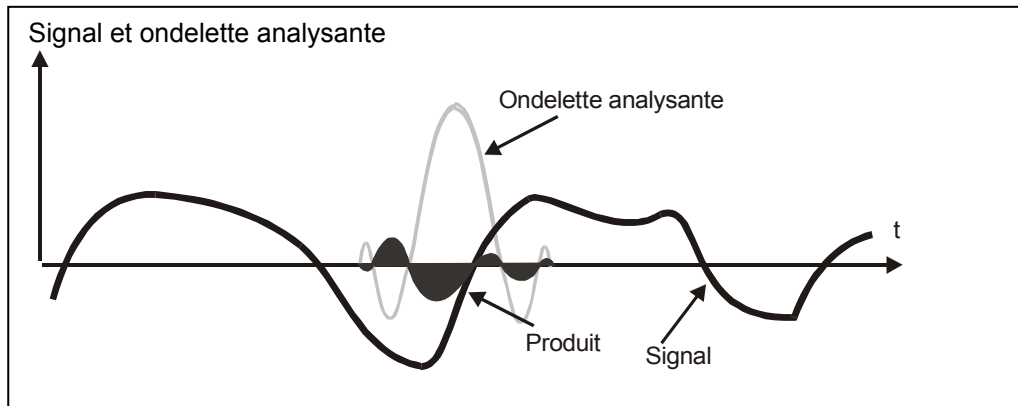
La transformation consiste à effectuer un produit scalaire entre l'ondelette analysante et la fonction à étudier :

$$CWT_{x,\Psi}(\tau, s) = \int x(t) \cdot \Psi_{\tau,s}^*(t) dt$$

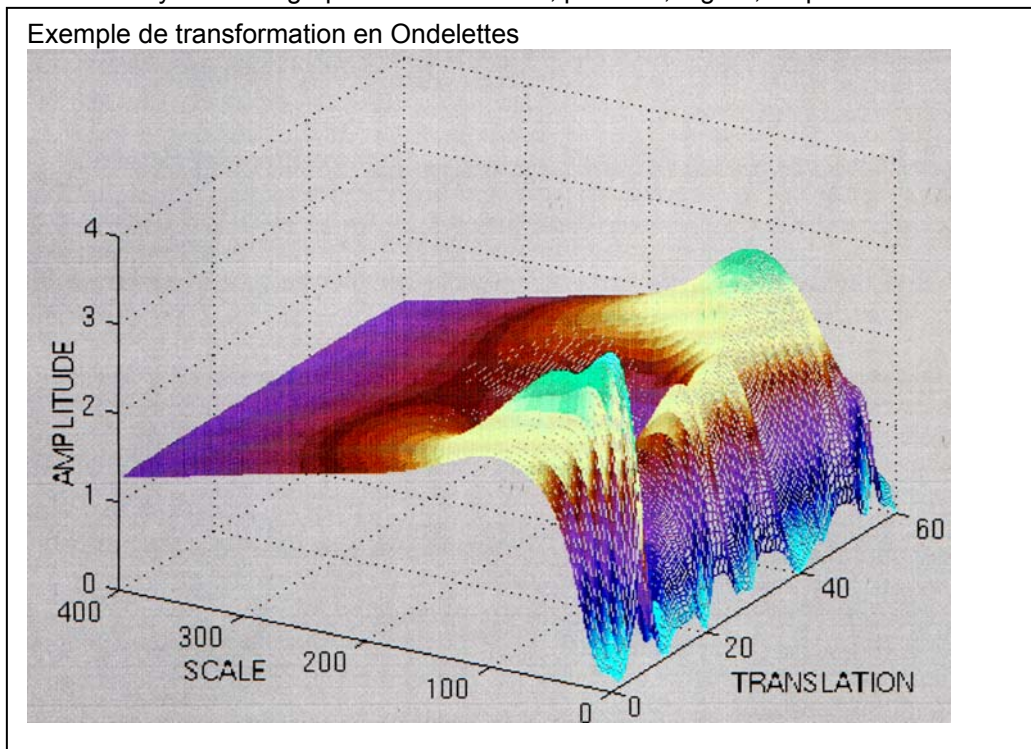


La conjugaison n'est nécessaire que dans le cas d'un signal complexe , c'est le cas par exemple d'une ondelette de Morlet .

Physiquement cela revient à faire le produit du signal par l'ondelette analysante et calculer la surface sous le produit .



Le résultat de l'analyse est un graph à 3 dimensions , position , largeur, amplitude .



Le développement des mathématiques relatives à cette transformation sortent du cadre de ce cours .

Si l'ondelette analysante est bien choisie, en pratique il suffit qu'elle soit de moyenne nulle il existe une transformée inverse .Elle est cependant de peu d'intérêt et de convergence lente .Voir ouvrages ci dessous

Bibliographie :

Ondelettes et traitement numérique du signal  
A Cohen Editions Masson 1992

Ondelettes pour le signal numérique Collection traitement du Signal  
Frederic Truchetet Editions Hermes 1998