SIGNAUX ALEATOIRES

La théorie des probabilités fait intervenir un ensemble Ω dont les éléments ω représentent les différentes épreuves d'une expérience aléatoire. Dans l'expérience lancé d'un dé l'ensemble Ω est constitué des 6 éléments correspondant aux 6 faces (ω = 1 2 3 4 5 ou 6) . Un événement est une partie de Ω, par exemple si une expérience est le lancé de deux dés ,l'événement est l'association de deux ω.

Si nous considérons maintenant une résistance de 1000Ω et l'amplitude du bruit à ses bornes, l'espace Ω est continu et formé de toutes les valeurs possibles de cette tension ,c'est à dire un nombre réel. Les valeurs de la tension prélevée à l'instant 0 aux bornes d'une résistance

constituent une variable aléatoire , l'évolution de vj en fonction du temps est une fonction aléatoire

dont $v_j(t)$ est une réalisation.

Obéissant aux lois du hasard un processus aléatoire ne peut être décrit par aucune équation exacte, les seules descriptions possibles sont de nature probabiliste.

MOMENTS MOYENNE ET ERGODICITE

Prenons comme exemple le bruit d'une résistance .

Pour définir une valeur moyenne de ce bruit deux méthodes sont possibles .

1° On considère un nombre très grand de résistances de 1000Ω aux bornes desquelles à l'instant 0 on mesure la tension de bruit Vj(0), l'indice j désignant l'une des résistances . La valeur moyenne est alors .

$$E(V(0)) = Lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_j(0)$$

Cette même méthode serait utilisée pour déterminer la valeur d'une résistance de 1000Ω à la sortie d'une chaîne de fabrication, cette valeur n'étant pas constante d'un échantillon au suivant est aussi une grandeur aléatoire.

Ce type de moyenne est appelée moyenne d'échantillon. Notez qu'elle est indépendante de l'indice j d'un élément mais éventuellement fonction du temps.

Autre exemple , la grandeur aléatoire est la taille d'un brin d'herbe arraché au hasard dans une pelouse . On arrachera un grand nombre de brins et l'on effectuera une moyenne d'échantillon :

$$E(h) = Lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} h_j$$

h_j étant la hauteur du brin j

2° Mais pour revenir aux résistances on peut penser que le bruit aux bornes de l'une d'elles prend au cours du temps toutes les valeurs possibles que l'on aurait pu observer sur un grand nombre de résistances à l'instant 0. Il est alors raisonnable d'effectuer une moyenne temporelle :

$$\overline{V} = Lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_j(t)dt$$

Si toutes les résistances sont parfaitement identiques il est normal de penser que ce résultat ne dépend pas de l'échantillon choisi.

Pourquoi ne pas effectuer la même opération pour le brin d'herbe en semant une graine et en observant sa croissance . Sa hauteur h(t) prend au cours de sa vie toutes les valeurs possibles et l'on calcule une moyenne .

$$\overline{h} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} h(t)dt$$ To étant la durée de vie de l'échantillon.

Cependant il n'y a aucune raison pour que dans ce cas les deux moyennes soient identiques $E(h) \neq \overline{h}$ alors que c'est le cas pour les bruits de résistance.

Si la moyenne d'échantillon E , que l'on appelle **Espérance mathématique** , est égale à la **moyenne temporelle** on dit que le **processus est ergodique.**

Dans tout ce qui suit nous supposerons que les bruits aléatoires superposés au signal utile possèdent cette propriété.

Pour des signaux ergodiques (plus rigoureusement ergodiques stationnaires)

$E(x) = \overline{x}$ est la valeur moyenne du signal,

$E((x - E(x)^2) = \overline{(x - \overline{x})^2}$ est la variance σ_x^2 du signal . Si x est de moyenne nulle $\sigma_x^2 = \overline{x^2}$ c'est le **moment d'ordre deux** de x .En traitement de signal on considère souvent que cette moyenne du carré de x est la puissance du signal (Ce serait vrai sur une résistance de 1Ω)

Fonction d'autocorrélation :Théorème de Wiener Kintchine

Si l'on prélève deux échantillons d'un signal aléatoire x à deux instants distants d'un écart fixe τ le produit obtenu x(t).x(t-τ) est lui même une variable aléatoire qui possède une espérance mathématique et une moyenne temporelle .

$$E[x(t).x(t-\tau)] = R_X(\tau)$$

est par définition la **fonction d'autocorrélation** du signal.

Nous allons montrer que c'est aussi la transformée de Fourier du spectre de puissa,nce.

Pour cela le signal x(t) est limité à une durée T (de 0 à T) .Le signal $x_T(t)$ ainsi obtenu est absolument intégrable et de durée finie, il a une transformée de Fourier $X_T(j2\pi f)$

Sa puissance moyenne pendant la durée T est :

$$\overline{P_T} = \frac{1}{T}\int_0^T x_T(t)^2\, dt$$

Mais aussi en vertu du théorème de Parceval :

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f|^2\, df$$

La puissance moyenne du signal x est définie en faisant tendre T vers l'infini , soit

$$\overline{P} = Lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} Lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(j2\pi f)|^2\, df$$

Mais pour chaque partition de durée T du signal le spectre $X_T(j2\pi f)$ est différent , c'est une variable aléatoire qui a donc une espérance .

Soit :

$$I(T) = E\left[|X_T(j2\pi f|^2\right] = E\left[\int_0^T x(t)\exp(-j2\pi f t)dt\int_0^T x(s) exy(j2\pi f s)ds\right]$$

$$= \int_0^T\int_0^T E[x(t)x(s)]\exp(-j2\pi f(t-s))dsdt$$

Pour calculer cette intégrale posons t-s = τ alors $E[x(t)x(t-\tau)] = R_X(\tau)$

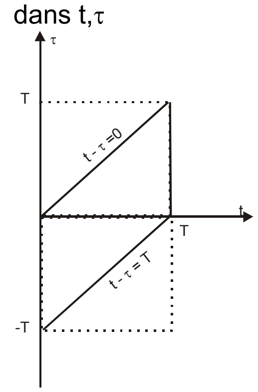
Dans le plan s,t la zone d'intégration est un carré de coté T , dans le plan t,τ c'est un parallélogramme comme le montre la figure ci contre .

L'intégrale devient :

$$I(T) = \int_0^T\int^{\tau} R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)dt(-d\tau) = \int_{\tau} R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)\int_0^T dt$$

En se plaçant à τ=Cte et en intégrant en t deux cas se présentent suivant que τ est positif ou négatif. Nous écrirons donc :

Bornes d'intégration dans t,τ



$$I(T)=\int_{\tau=-T}^{0}R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)\left[\int_{t=0}^{t=t+\tau}dt\right]d\tau+\int_{\tau=0}^{T}R_x(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)\left[\int_{t=\tau}^{t=T}dt\right]d\tau$$

Soit compte tenu des deux termes entre [ ] : qui valent respectivement T+τ et T-τ

$$\frac{I(T)}{T}=\int_{-T}^{T}R_X(\tau)\exp(-j2\pi f\tau).(1-\frac{|\tau|}{T})d\tau$$

Si l'on pose $R_{XT}(\tau)=\begin{cases}R_X(\tau).(1-\frac{|\tau|}{T}) & si \quad |\tau|<T\\ 0 \quad si \quad |\tau|>T\end{cases}$

Alors :

$$\frac{I(T)}{T}=\int_{-T}^{T}R_{XT}(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

Si $T \to \propto$ $\qquad R_{XT}(\tau)\Rightarrow R_X(\tau)$ donc :

$$Lim_{T\to\infty}\frac{I(T)}{T}=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

Le terme de gauche est le spectre de puissance et Rx(τ) sa transformée de Fourier .C'est le théorème de Wiener Kintchine annoncé .

Le spectre de bruit (DSP) d'un signal aléatoire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation .

Analyse spectrale d'un bruit .

Un signal aléatoire n'a pas de représentation temporelle donc pas de transformée de Fourier et cependant si on l'injecte à l'entrée d'un analyseur de spectre ce dernier délivre un résultat .Que signifie ce dernier ?

Il faut d'abord faire une première remarque .

La transformation de Fourier suppose une intégration de -∝ à +∝ qu'il n'est pas possible de faire , l'analyseur de spectre ne peut qu'intégrer pendant une durée finie, il calcule :

$$\int_{t=t_0}^{t_0+T}x(t).\exp(-j2\pi ft)dt=X_{T,t_0}(j2\pi f)$$

résultat qui dépend de T et peut être de la position de l'intervalle de temps de calcul.
Il sera montré plus tard que si T est assez grand l'erreur commise c'est à dire l'écart entre $X_T(f)$ et X(f) peut être faible et négligée . .

Cependant si l'on effectue sur plusieurs échantillons du bruit de durée T la même analyse on trouve des résultats successifs complètement différents , le résultat est aléatoire.

Soient X1 X2 X3 X4 … les spectres fournis par l'appareil à l'issue de plusieurs séances de mesure , ils sont différents mais si l'on examine pour chacun d'eux module et phase :

X1=|X1|exp(jφ1) X2=|X2|exp(jφ2) etc .. on constate que si les phases sont différentes d'un résultat à l'autre , les modules , aux erreurs près sont identiques . En effet un signal aléatoire n'a pas de transformée de Fourier mais possède un spectre de puissance qui serait le carré du module du précédent .

PROBABILITES DENSITE DE PROBABILITE

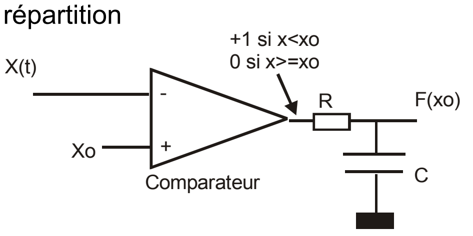
Pour un processus aléatoire discret un événement A à une probabilité p_A si , lorsque le nombre N d'essais tend vers l'infini , le nombre N_A de fois ou l'événement A se produit est $N_A=p_AN$. C'est la notion intuitive de probabilité.

Pour un signal aléatoire continu fonction du temps on peut définir la **fonction de répartition** $F(x_0)$ comme la probabilité de mesurer une amplitude instantanée inférieure à x_0 lors d'un échantillonnage bref du signal. Soit :

$$F(x_0) = \Pr obabilité \quad de \quad x < x_0 = \frac{Durée\, pendant\ laquelle \quad x < x_0}{Durée \quad totale}$$

Une telle fonction de répartition peut être évaluée avec un comparateur suivi d'un système intégrateur comme le montre la figure ci jointe.

Appareil d'évaluation de la fonction de répartition



Le choix de la constante de temps d'intégration est essentiel , il dépend du contenu spectral du signal x , nous ne discuterons pas de ce problème ici .

La dérivée de cette fonction est **la densité de probabilité** p(x)

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Calcul des moyennes d'échantillon .

Soit une expérience pouvant fournir deux résultats numériques x=A et x=B de probabilité respectives p_A et p_B . Pour un grand nombre N d'essais , le résultat A sort Np_A fois et le résultat B Np_B fois.. La valeur moyenne est alors :

$$E(x) = \frac{Np_A A + Np_B B}{N} = Ap_A + Bp_B$$

Pour un nombre quelconque de valeurs possibles cette formule se généralise en

$$E(x) = \sum_k p_k x_k$$

Pour un processus continu cette relation devient :

$$E(x) = \int x.p(x)dx$$

avec évidemment : $\int_{-\infty}^{+\infty} .p(x)dx = 1$

Le moment d'ordre deux ou puissance est $\sigma_X^2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$

De façon générale une fonction f(x) de la variable aléatoire x à pour moyenne :

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

Si le processus est ergodique l'espérance E est égale à la moyenne temporelle .

On introduit parfois la **fonction caractéristique** qui à une constante près est la transformée de Fourier de p(x) .

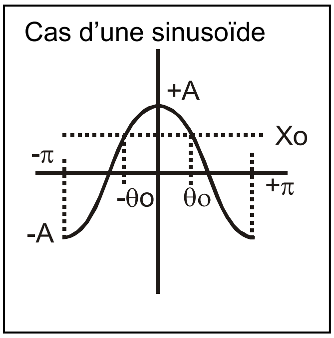
$$\varphi_X(u) = E\left[e^{jux}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x).e^{jux}dx$$

La notion de densité de probabilité peut s'étendre à des signaux déterministes fonction du temps, dans ce cas le caractère aléatoire apparaît lorsque l'on effectue un échantillonnage du signal à des instants aléatoires.

Soit par exemple une sinusoïde $x = A\cos(2\pi \frac{t}{T}) = A\cos\theta(t)$

La fonction de répartition est calculée en évaluant combien de temps x est inférieur à une valeur x_o.

La figure montre clairement que $F(x_0) = \frac{2(\pi - \theta_0)}{2\pi} = 1 - \frac{\theta_0}{\pi}$



Avec $\theta_0 = arc\cos\frac{x_0}{A}$

$$F(x = x_0) = 1 - \frac{1}{\pi} arc\cos\frac{x_0}{A}$$

La densité de probabilité est la dérivée soit :

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

On notera qu'elle est infinie aux bornes ±A.

Processus Gaussiens Théorème Central limite

Un processus gaussien centré à pour densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Le paramètre σ² est la variance .

Cette densité de probabilité est fondamentale car on peut montrer que si un processus aléatoire est formé par la somme d'un très grand nombre de processus indépendants et de même densité de probabilité (quelconque) , il est gaussien . C'est **le théorème de la limite centrale** .

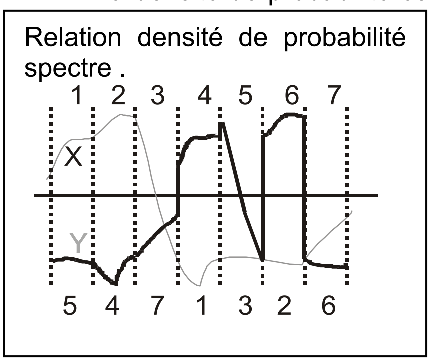
Ainsi le bruit thermodynamique constitué de la somme des signaux crées par les mouvements d'un grand nombre d'électrons est gaussien . C'est une façon de tester la qualité d'une résistance , si le bruit à ses bornes n'est pas gaussien elle est à priori défectueuse .

La densité de probabilité gaussienne est également précieuse à cause de ses propriétés mathématiques , on peut montrer en particulier :

- Si on multiplie un processus gaussien par une constante le résultat reste gaussien
- La somme de deux processus gaussiens est gaussienne .
- La combinaison linéaire de plusieurs gaussiennes est gaussienne
- Il en découle que si un système linéaire est attaqué par un signal gaussien, le signal de sortie correspondant est lui même gaussien.

Densité spectrale de puissance et densité de probabilité .

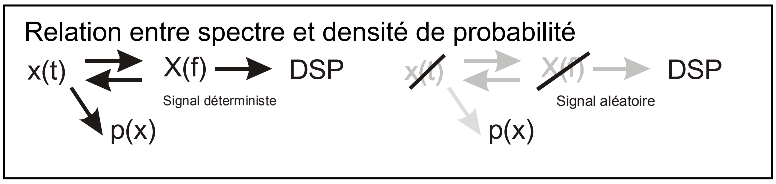
La densité de probabilité est une grandeur statistique qui n'a pas forcément de rapport avec le spectre.



Pour un signal certain dont on connaît la forme x(t) il est possible de calculer la densité de probabilité comme on vient de le faire pour la sinusoïde ..Mais découpons le signal en zones de durée fixe et construisons un nouveau signal y en accolant ces zones dans un ordre différent . C'est ce que montre la figure ci contre, les morceaux numérotés de 1 à 7 ont été accolés dans l'ordre 5 4 7 1 3 2 6 pour constituer le signal y .Il est évident que les signaux x et y ont la même densité de probabilité , ils n'ont par contre pas le même spectre .(ni spectre d'amplitude ni DSP)

Deux signaux peuvent avoir même p(x) et des spectres différents , il n'existe donc aucune relation permettant de déterminer le spectre à partir de p(x) .

La figure ci dessous montre que pour un signal déterministe on peut passer de x(t) au spectre Xf) et inversement et de X(f) à la DSP mais non inversement . De x(t) on peut également passer (difficilement) à p(x) mais non inversement .



Pour un signal aléatoire il ne reste que p(x) et la DSP sans aucune relation entre elles .

SIGNAUX ALEATOIRES ET SYSTEMES LINEAIRES

Seule subsiste la notion de spectre de puissance

$$S_Y(f) = S_X(f).\left|H(j2\pi f)\right|^2$$

L'outil essentiel sera donc le théorème de Wiener Kintchine .

Il est intéressant de calculer les intercorrélations entre les signaux présents sur un filtre linéaire.

Intercorrélation entre les signaux d'entrée et sortie d'un système linéaire

Le théorème du produit de convolution appliqué à la relation

$$S_Y(f) = S_X(f).H(j2\pi f).H^{\times}(j2\pi f)$$

donne directement

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

relation sans grand intérêt. Il est plus intéressant de calculer la fonction d'intercorrélation sortie entrée : Pour un signal ergodique on peut effectuer des moyennes temporelles qui n'affectent que les termes en t , soit :

$$R_{YX}(\tau) = \overline{y(t).x(t-\tau)} = \overline{x(t-\tau)\int h(u).x(t-u)du} = \int h(u).\overline{x(t-\tau)x(t-u)}du.$$

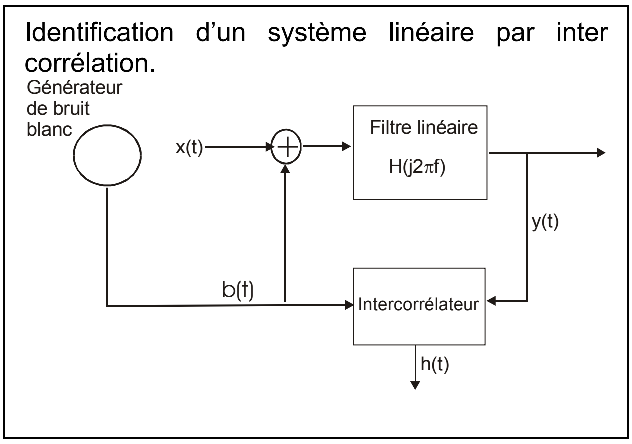
$$= \int h(u).R_X(u-\tau)du = \int h(u)R_X(\tau-u)du = h(\tau)\otimes R_X(\tau)$$

Cas particulier d'un bruit blanc .

Pour un tel bruit $S_x(f)$ est une constante donc $Rx(\tau)=\delta(\tau)$

L'expression précédente donne alors : $R_{YX}(\tau) = h(\tau)$ réponse impulsionnelle du filtre .

Ce résultat peut être exploité pour déterminer la fonction de transfert d'un filtre linéaire, on obtient en réalité la réponse impulsionnelle dont on fait ensuite la transformée de Fourier . Le schéma de principe est donné sur la figure ci contre .



La méthode suppose que l'on dispose d'un générateur de bruit blanc dont le signal est injecté à l'entrée du filtre .

Il existe de nombreux systèmes qui ne sont pas linéaires mais qui peuvent être linéarisés autour d'un point de fonctionnement. Le filtre doit dans ce cas fonctionner avec un niveau de signal donné (autour duquel on effectue la linéarisation) , il est cependant possible d'ajouter à l'entrée un faible bruit blanc .

Le signal d'entrée est alors x(t)=e(t)+b(t)

Donc le signal de sortie

$y(t)=h(t)\otimes[e(t)+b(t)] =h(t)\otimes e(t)+h(t)\otimes b($

La fonction d'intercorrélation entre le signal de sortie et le bruit injecté devient :

$$R_{YB}(\tau) = \overline{y(t).b(t-\tau)} = \overline{b(t-\tau)\int h(u)e(t-u)du + b(t-\tau).\int h(v)b(t-v)dv}$$

soit en isolant les termes en t sur lesquels portent l'opération de moyenne :

$$R_{YB}(\tau) = \int h(u).\overline{b(t-\tau)e(t-u)}du + \int h(v).\overline{b(t-\tau).b(t-v)}.dv$$

c'est à dire :

$$R_{YB}(\tau) = \int h(u).R_{BE}(\tau-u)du + \int h(v).R_B(\tau-v).dv$$

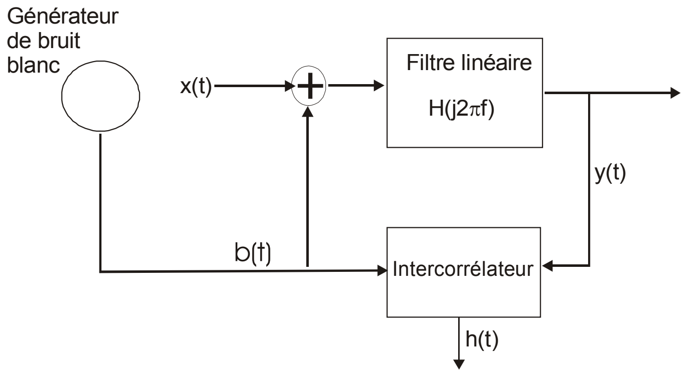
Si signal e(t) et bruit blanc injecté sont indépendants le terme R_{BE} est nul et il reste la même expression que plus haut :

$$R_{YB}(\tau) = h(\tau) \otimes R_B(\tau)$$

Si le bruit est blanc $R_B(\tau)=\delta(\tau)$ et $R_{YB}(\tau)=h(\tau)$

D'ou le schéma du montage utilisé pour identifier un processus autour d'un point de fonctionnement moyen .

Détermination d'une fonction de transfert locale .



MAX dans son ouvrage [4] cite l'exemple d'un réacteur nucléaire pour lequel le signal d'entrée est un flux de neutrons et celui de sortie sa puissance en watts.

Pour un fonctionnement à un régime donné et de faibles variations de ce régime, le système peut être linéarisé. Le bruit injecté est un faible flux de neutrons dont l'intensité est modulée de façon qu'elle ressemble à un bruit. , injecté par un orifice latéral au cœur du réacteur.