

SIGNAUX ET SYSTEMES

Dans la majorité des ouvrages on admet toujours implicitement que le bruit $b(t)$ s'ajoute au signal utile $s(t)$, le signal reçu étant alors $x(t)=s(t)+b(t)$. C'est le plus souvent vrai mais il existe des cas plus complexes,

Si le bruit module le gain du système il faut écrire $x(t)=s(t).b(t)$ Ce serait par exemple le cas d'une antenne agitée par le vent ou du fading rapide d'un signal radio du à l'agitation de l'ionosphère.

Si le bruit modifie la fonction de transfert d'un système, nous verrons plus loin le cas des enregistrements effectués au début du siècle sur rouleaux de cire, le mélange est convolutif.

$$x(t)=s(t)\otimes b(t)$$

Dans ces deux cas les méthodes classiques d'amélioration du rapport signal bruit sont peu efficaces. Il existe cependant une méthode pour se ramener au cas d'une simple addition, elle fait appel à ce que l'on appelle des systèmes homomorphiques.

SYSTEMES HOMOMORPHIQUES

Un système homomorphique est la généralisation d'un système linéaire.

Un système est dit linéaire s'il obéit au principe de superposition qui s'énonce ainsi :

Si à un signal d'entrée e_i correspond un signal de sortie s_i ,

alors au signal d'entrée $a_1.e_1(t) + a_2.e_2(t)$ correspond le signal de sortie $a_1.s_1(t) + a_2.s_2(t)$

Cette relation fait appel à deux opérateurs une multiplication par un scalaire et une addition.

Un système homomorphique est défini de la même façon mais avec d'autres opérateurs Deux opérateurs qui combinent une fonction du temps et un scalaire, nous les noterons \blacksquare et \square et deux opérateurs qui combinent deux fonctions du temps \bullet et \circ

Alors si $s_1(t)$ est la réponse au signal d'entrée $e_1(t)$

$$\text{à } a_1 \blacksquare e_1(t) \bullet a_2 \blacksquare e_2(t)$$

$$\text{correspond } a_1 \square s_1(t) \circ a_2 \square s_2(t)$$

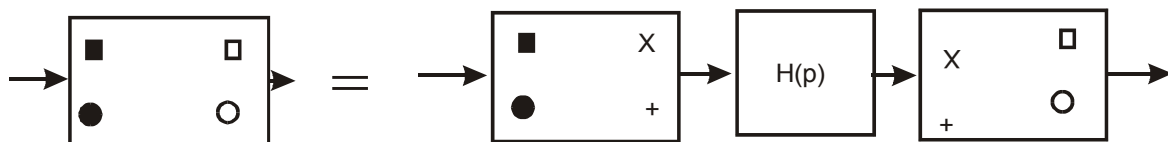


Ce système est représenté par le graphisme ci contre.

Ainsi un filtre linéaire n'est qu'un cas particulier de système homomorphique avec comme opérateurs la multiplication et l'addition.

Théorème fondamental

On peut montrer que tout système homomorphique dont les opérateurs d'entrée sont \blacksquare et \bullet et les opérateurs de sortie \square et \circ peut être décomposé en deux systèmes homomorphiques d'entrée et de sortie, le premier ayant comme opérateurs d'entrée \blacksquare et \bullet et de sortie \times et $+$, le second à comme opérateurs de sortie \square et \circ et d'entrée \times et $+$, ils sont séparés par un filtre linéaire.



Tous les systèmes homomorphiques caractérisés par un double couple d'opérateurs donnés ne se différencient que par le filtre linéaire intermédiaire.

Systemes homomorphiques multiplicatifs

L'opérateur de combinaison de deux fonctions de t est une multiplication, l'opérateur d'association entre fonction et scalaire est donc une élévation à une puissance .

Dans ce cas particulier $a_1 \blacksquare e_1(t) \bullet a_2 \blacksquare e_2(t)$ devient $e_1(t)^{a_1} \cdot e_2(t)^{a_2}$

Et en sortie $a_1 \cdot s_1(t) + a_2 \cdot s_2(t)$

De même en sortie $a_1 \square s_1(t) \bigcirc a_2 \square s_2(t)$

donne : $s_1(t)^{a_1} \cdot s_2(t)^{a_2}$

Il faut définir les systèmes d'entrée et de sortie . Il est assez évident qu'il suffit de faire appel aux logarithmes :

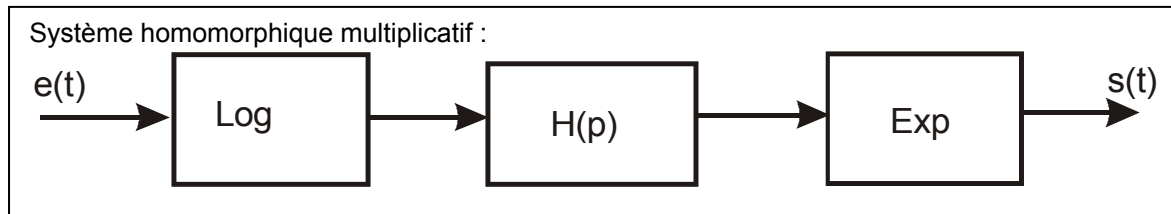
En effet : $\text{Log}(e_1^{a_1} \cdot e_2^{a_2}) = a_1 \cdot \text{Log}(e_1) + a_2 \cdot \text{Log}(e_2)$

On voit tout de suite la difficulté car $\log(0) = -\infty$ et il faut définir les logs de nombres négatifs !

Le problème est résolu pour une image car le signal est toujours positif .

Pour le système de sortie il faut évidemment utiliser la fonction inverse c'est à dire l'exponentielle .

Le système complet est alors le suivant :



Exemple d'application : Traitement d'image :

Soit une image comprenant deux grandes zones éclairées de façon très différentes. Par exemple une grange dans laquelle sont rangés à l'ombre des engins agricoles , située au milieu d'un paysage baigné de soleil. Le contraste entre les deux zones est considérable et une photographie est difficile à prendre, si l'on pose pour la partie éclairée par le soleil ,l'intérieur de la grange est complètement noire , bouchée disent les photographes , si au contraire l'on pose pour l'ombre le paysage est 'cramé ' .

La brillance $B(x,y)$ d'un point de l'image peut être considérée comme le produit de l'éclairement $E(x,y)$ par la réflectance de l'objet $R(x,y)$.

$$B(x,y) = E(x,y) \cdot R(x,y)$$

Mais $R(x,y)$ qui décrit les détails fins de l'objet est une fonction haute fréquence (fréquences spatiales) , alors que l'éclairement est basse fréquence puisqu'il est constant dans chacune des deux parties de l'image . La technique est alors la suivante :

Le circuit d'entrée prend le logarithme ce qui a pour résultat de séparer les deux composantes :

$$\text{Log}(E \cdot R) = \text{Log}(E) + \text{Log}(R)$$

Mais le premier terme est de basse fréquences alors que le second a surtout des composantes HF (les détails fins de l'image) .On effectue alors un filtrage passe haut qui favorise R au détriment de E .A la sortie du filtre le signal est devenu :

$$\text{Log}(E) + A \cdot \text{Log}(R) \quad \text{avec } A > 1$$

Le système de sortie délivre alors :

$$\text{Exp}[\text{Log}(E) + A \cdot \text{Log}(R)] = E \cdot R^A$$

Cela correspond à un abaissement du contraste, mais l'effet est bien plus satisfaisant qu'une modification classique, en utilisant du papier photo doux par exemple, car dans ce cas le contraste est réduit aussi dans la partie à l'ombre, ce qui n'est pas souhaitable.

Systèmes homomorphiques convolutifs

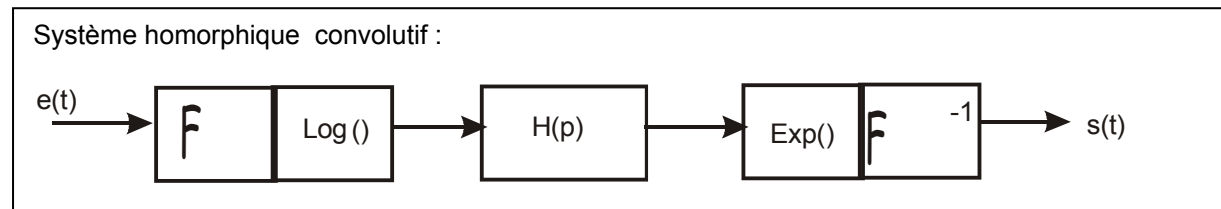
Cette fois les composantes du signal d'entrée sont mélangées par convolution.

$$X(t) = e(t) \otimes b(t)$$

La cassure de cette convolution est plus difficile que dans le cas précédent. La démarche est la suivante :

On prend la transformée de Fourier du signal d'entrée ce qui a comme résultat de transformer le produit de convolution en produit normal dont il suffit ensuite de prendre le logarithme pour obtenir une combinaison additive. Cette fois les difficultés mathématiques sont grandes car on prend le logarithme d'un nombre complexe. La fonction log dans le plan complexe est multiforme et de grandes précautions sont nécessaires.

Le système de sortie effectuera l'opération inverse, exponentiation et transformée de Fourier inverse.



Un tel traitement ne peut bien sûr être effectué que de façon numérique.

On trouve des opérations de ce type en traitement de la parole, le spectre d'une voix présente le long de l'axe des fréquences une certaine périodicité qui se traduit par des raies si l'on effectue une nouvelle transformation de Fourier. La transformée de Fourier inverse du logarithme de la transformée de Fourier d'un signal est son **cepstre**, c'est une fonction du temps :

$$C_s[x(t)] = \mathfrak{T}^{-1}[\text{Log}_e(\mathfrak{T}(x(t)))]$$

Cette fonction est bien sûr complexe. Pour éviter les difficultés dues au caractère multiforme du logarithme complexe on utilise parfois la transformée inverse de Fourier du logarithme du spectre de puissance, ce dernier étant toujours positif.

C'est le **cepstrum** :

$$CSU[x(t)] = \mathfrak{T}^{-1}[\log S_x(f)]$$

Exemple : Restitution de la voix de Caruso à partir d'enregistrements sur rouleau de cire

L'écoute directe de l'enregistrement délivre un son nasillard caractéristique dans lequel la voix du ténor est complètement déformée. Un filtrage harmonique est dans ce cas totalement inefficace, le son devient plus sourd mais la voix est toujours aussi déformée, sinon plus.

Le problème vient de l'enregistrement. A l'époque on pratiquait un enregistrement direct, le ténor chantait devant un grand pavillon solidaire d'une membrane portant un stylet qui gravait la cire du rouleau. Or la fonction de transfert d'un tel ensemble est extrêmement irrégulière, le gain peut varier de 10 fois pour deux fréquences distantes de seulement quelques hertz. C'est cette irrégularité de la bande passante qui constitue le bruit. Il s'agit donc bien d'un mélange par convolution.

Le signal lu sur le rouleau a pour transformée de Fourier :

$$X(j2\pi f) = E(j2\pi f) \otimes H(j2\pi f)$$

dans lequel H est inconnue et très irrégulière.

Le système homomorphique convolutif fait correspondre au signal d'entrée x(t) un signal :

$$\text{Log}[E(f)] + \text{Log}[H(f)]$$

A la différence du cas précédent ces deux termes ont des transformées inverses dans la même bande, il n'est donc pas possible d'effectuer un filtrage simple. On effectue un filtrage adapté après avoir déterminé une valeur approchée de $H(f)$ en effectuant des intercorrélations entre plusieurs courtes séquences du signal dont le contenu est différent mais le filtrage par $H(f)$ identique. Toutes ces opérations complexes nécessitent un temps de calcul important mais les résultats obtenus sont spectaculaires. La voix restituée semble naturelle, malheureusement personne n'est là pour la comparer à l'original.

SIGNAUX ET SYSTEMES LINEAIRES

Nous supposons que le signal et le bruit sont simplement ajoutés.

Rapport signal bruit

L'amplitude d'un signal n'est pas une grandeur importante, il est toujours possible de l'amplifier, ce qui importe c'est le rapport entre cette amplitude et celle du bruit qui lui est ajouté. La grandeur essentielle est donc le rapport signal sur bruit, que l'on définit comme un rapport de puissances :

$$\rho = \frac{\text{Puissance du signal utile}}{\text{Puissance du bruit}}$$

Dans le cas le plus général ce rapport peut s'exprimer à l'aide des densités spectrales des deux intervenants : $S_{se}(f)$ pour le signal $S_{be}(f)$ pour le bruit.

$$\rho_e = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{se}(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{be}(f) df}$$

Si le signal est faible par rapport au bruit la densité spectrale du bruit est sensiblement identique à celle du signal d'entrée complet :

$$\rho_e = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{se}(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df}$$

Pour améliorer ce rapport on utilisera un filtre linéaire de fonction de transfert $H(j2\pi f)$. A la sortie de ce filtre le rapport précédent devient :

$$\rho_s = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{se}(f) |H(j2\pi f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{be}(f) |H(j2\pi f)|^2 df}$$

Le problème est alors de déterminer la valeur de la fonction de transfert du filtre qui rend ce nouveau rapport maximum, ou plus exactement l'amélioration de ce rapport noté :

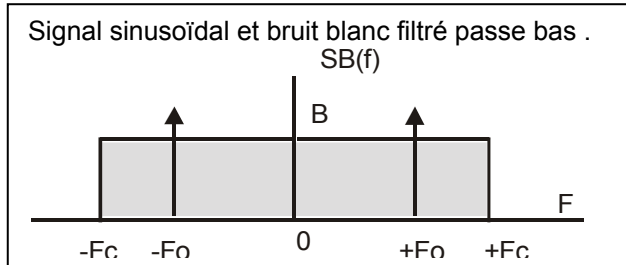
$$\eta = \frac{\rho_s}{\rho_e}$$

Filtrage d'un signal sinusoïdal noyé dans un bruit blanc

Le signal utile est une sinusoïde :

$$s(t) = a \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{de puissance} \quad P_{SE} = \frac{a^2}{2}$$

Il est noyé dans un bruit de puissance totale P_{BE} , comme il est d'usage en traitement de signal cette puissance est la moyenne du carré $P_{BE} = \sigma_B^2$, ce qui revient à faire la mesure sur 1Ω . Nous supposons que le bruit est un bruit blanc filtré passe bas avec une fréquence de coupure f_c , c'est à dire que sa DSP est nulle pour $|f| > f_c$ et constante ailleurs. (Figure ci contre.) La fréquence du signal utile est située dans la bande $f < f_c$.



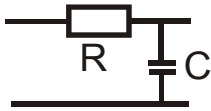
Alors :

$$\sigma_B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{BE}(f) df = 2Bf_c \quad \text{d'ou} \quad B = \frac{\sigma_B^2}{2f_c}$$

et le rapport signal bruit :

$$\rho_E = \frac{a^2}{2\sigma_B^2}$$

Effectuons sur le signal un filtrage passe pas par un simple RC intégrateur : de fonction de transfert



$$H(j2\pi f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}$$

A la sortie de ce filtre le signal sinusoïdal a une

puissance : $P_{SS} = \frac{a^2}{2} |H(j2\pi f_0)|^2$

et le bruit : $P_{BS} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{BE}(f) \cdot \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2} df = B \int_{-f_c}^{f_c} \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2} df$

Filtrage fort .

Cette intégrale est facilement calculable mais très souvent la fréquence de coupure du filtre est très inférieure à la fréquence de coupure du bruit. Alors la fonction de transfert est négligeable pour $|f| > f_c$ on peut remplacer les limites d'intégration par $\pm\infty$.

Alors en posant $\alpha = 2\pi RCf$ il vient :

$$P_{BS} = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{d\alpha}{2\pi RC} = \frac{B}{2\pi RC} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2} d\alpha = \frac{B}{2RC} = \frac{\sigma_B^2}{4RCf_c}$$

Résultat important que l'on retrouvera souvent . Si le bruit n'est pas blanc mais la fréquence de coupure du filtre très faible , la formule reste valable en remplaçant B par la valeur à fréquence nulle de la DSP du bruit.

Si la fréquence f_0 du signal sinusoïdal est elle même petite devant f_c , il est possible de choisir une constante de temps assez courte pour ne pas trop atténuer le signal tout en conservant un filtrage fort .

Le rapport signal sur bruit en sortie du filtre est alors :

$$\rho_S = \frac{\frac{a^2}{2} |H(f_0)|^2}{\frac{\sigma_B^2}{4RCf_c}} = \rho_E \cdot 4RCf_c |H(f_0)|^2$$

en posant $f_F = 1/2\pi RC$ fréquence de coupure du filtre RC , l'amélioration du rapport S/B s'écrit :

$$\eta = \frac{\rho_S}{\rho_E} = \frac{2f_c}{\pi f_F} |H(f_0)|^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{f_c f_F}{f_0^2 + f_F^2}$$

Il est facile de vérifier que cette expression est maximale pour $f_0 = f_F$ alors $\eta_{max} = \frac{1}{\pi} \frac{f_c}{f_0}$

Lorsque le signal utile n'est pas une sinusoïde la solution est moins intuitive .

Filtrage optimal et filtrage adapté

Le signal utile que nous désignerons par $x(t)$ est défini par son spectre de puissance, s'il s'agit d'un signal certain il possède aussi une transformée de Fourier :

Sa puissance est :

$$P_{SE} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{SE}(f) df$$

Il est aisé de comprendre qu'il n'est pas possible de trouver une valeur de H qui maximise le rapport signal /bruit pour toute valeur du temps, en effet un signal impulsionnel par exemple est presque nul en dehors d'une zone temporelle étroite autour de son maximum. Loin de ce maximum le signal étant nul le rapport S/B l'est aussi et le reste quelque soit H .

Nous chercherons donc à rendre le rapport S/B maximal à un instant choisi t_0 , le maximum par exemple.

Or pour $t=t_0$ la puissance de ce signal est :

$$P_{SE}(t_0) = |x(t_0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df \right|^2$$

Ce qui donne à la sortie du filtre :

$$P_{SS}(t_0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f) \cdot H(j2\pi f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df \right|^2$$

A cet instant le rapport S/B s'écrit alors :

$$\rho_S(t_0) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f) \cdot H(j2\pi f) \cdot e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{BE}(f) \cdot |H(j2\pi f)|^2 df}$$

La détermination de l'expression de H qui rend ce rapport maximal est obtenue grâce à une forme particulière de l'inégalité de Schwartz .

Si a et b sont des fonctions de u

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} a b^* du \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a|^2 du \int_{-\infty}^{\infty} |b|^2 du \text{ avec égalité pour } a = kb \text{ } k \text{ indépendant de } u \text{ c'est}$$

à dire :

$$\frac{\left(\int a \cdot b^* du \right)^2}{\int |a|^2 du} \leq \int |b|^2 du$$

expression ayant la même forme que l'expression de ρ_S . Alors en posant

$$\begin{cases} ab^* = H X e^{j2\pi f t_0} \\ |H|^2 S_{BE} = |a|^2 \end{cases}$$

soit : $a = H \sqrt{S_{BE}} e^{j\phi}$ ϕ quelconque

alors $H \sqrt{S_{BE}} e^{j\phi} b^* = H X e^{j2\pi f t_0}$

d'ou $b = \frac{X^* e^{-j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_{BE}} e^{-j\phi}}$

Le maximum à lieu pour l'égalité qui se produit lorsque :

$$H \sqrt{S_{BE}} e^{j\phi} = \frac{K X^* e^{-j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_{BE}} e^{-j\phi}}$$

D'où l'on tire la valeur optimale de H :

$$H(j2\pi f) = K \cdot \frac{X^*(j2\pi f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}}{S_{BE}(f)}$$

l'angle ϕ a disparu .La valeur maximale du rapport signal bruit est alors

$$\rho_{S_{\max}} = \int |b|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X^*(j2\pi f)|^2}{S_{BE}(f)} df$$

Ce filtre ainsi défini par sa fonction de transfert est appelé **filtre optimal** .
Si le bruit est blanc $S_{BE}(f)$ est une constante et le filtre devient un **filtre adapté**

$$H_{\text{adapté}}(j2\pi f) = K \cdot X^*(j2\pi f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Remarquez que l'instant pour lequel le rapport S/B est maximal n'apparaît que comme terme de phase .

Réalisation du filtre adapté

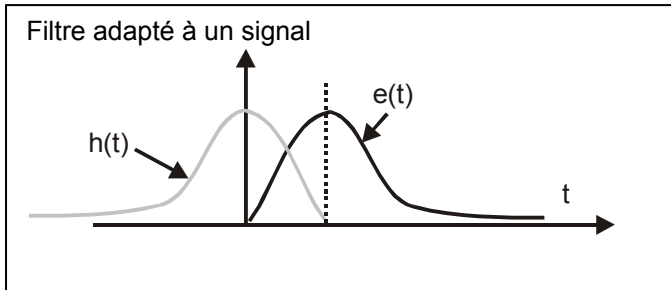
Pour déterminer ce qu'est exactement le filtre adapté calculons sa réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(j2\pi f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} K X^*(j2\pi f) e^{-j2\pi f t_0} \cdot e^{j2\pi f t} df = K \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j2\pi f) \cdot e^{j2\pi f (t-t_0)} df$$

en posant $f'=-f$ il vient :

$$h(t) = K \int_{-\infty}^{\infty} X(j2\pi f') \cdot e^{j2\pi f' (t_0-t)} df' = K \cdot x(t_0 - t)$$

C'est le signal lui même mais qui a subi un renversement temporel. Ce filtre n'est donc en général pas réalisable car non causal .



Cependant un tel filtre peut être construit s'il est appliqué à un signal enregistré , ou pour un traitement d'image pour lequel le temps n'intervient pas , dans ce dernier cas le filtrage pour un point de l'image fait intervenir les points situés des deux côtés.

La technique la plus simple pour réaliser un filtre adapté est le filtrage numérique transversal . On sait en effet que dans ce cas les coefficients du filtre sont les échantillons de la réponse

impulsionnelle . Dans le cas présent ces échantillons ont donc $x(t_0-nT)$ ou T est la période d'échantillonnage choisie en fonction de la fréquence de coupure du signal recherché. Le filtre a alors comme algorithme :

$$y(nT) = \sum_{k=-H}^{k=+H'} x(kT) \cdot x[(n-k)T] \text{ l'horizon } H-H' \text{ est choisi pour se cadrer sur le signal inversé.}$$

Cas particulier d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal pur symétrique par rapport à l'origine le filtre adapté prend une forme simple et d'ailleurs évidente :

$x(t)=a \cos(2\pi f_0 t)$ donne $h(t)=Ka \cos[2\pi f_0(t-t_0)]$ qui correspond à un filtre de fonction de

transfert $H(j2\pi f) = \frac{a}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] e^{-j2\pi f t_0}$

C'est au déphasage près un passe bande idéal de largeur nulle centré sur f_0 .

Un tel filtre n'est pas réalisable mais on peut s'en rapprocher , c'est la technique dite de détection synchrone qui sera développée dans le chapitre suivant .