

NOTES ANNEXES

I TRANSFORMEE DE FOURIER TFD ET FFT

La transformation de Fourier d'un signal non limité dans le temps est impossible puisqu'elle fait intervenir une sommation jusqu'à l'infini. Le calcul ne peut être effectué que si :

- Le signal est limité dans le temps
- Son spectre est limité en fréquence.

Transformation de Fourier analogique

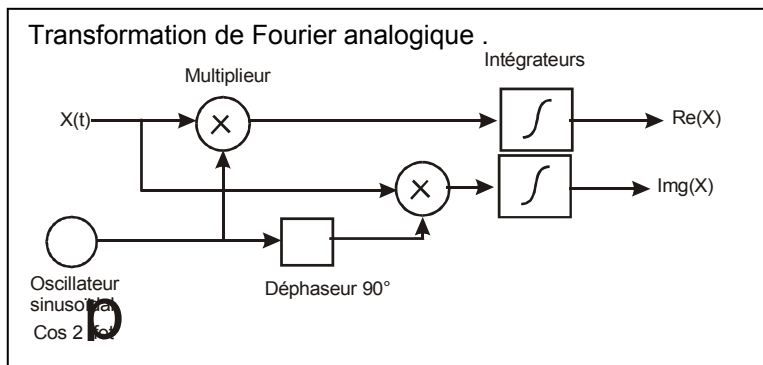
Une évaluation de la transformée peut être proposée en remarquant que

$$X(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

peut s'écrire :

$$X(j2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft] dt$$

Opération qui peut être approchée par le montage représenté ci dessous .



Pour chaque valeur de la fréquence f_0 il faut intégrer suffisamment longtemps pour que l'erreur sur le résultat soit négligeable.

Un tel montage est rarement mis en œuvre, en effet la phase du résultat n'a pas de sens pour un signal aléatoire, seul le spectre de puissance est significatif.

Il suffit de multiplier le signal $x(t)$ par une sinusoïde et

intégrer le résultat avec un filtre RC passe bas .

La fonction d'autocorrélation du signal y à la sortie du multiplieur est :

$$R_y(\tau) = \overline{x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \cdot x(t-\tau) \cdot \cos 2\pi f_0 (t-\tau)}$$

qui si l'on admet que signal et sinusoïde sont indépendants à pour valeur :

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cdot \cos 2\pi f_0 \tau$$

Et par transformée de Fourier un spectre :

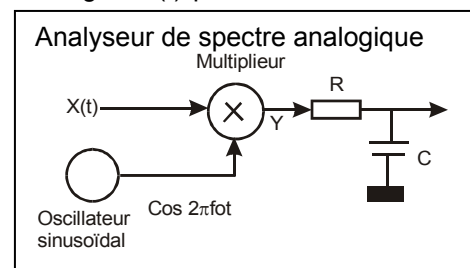
$$S_Y(f) = \frac{1}{4} S_X(f) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{4} [S_X(f - f_0) + S_X(f + f_0)]$$

Correspondant à la figure ci dessous :

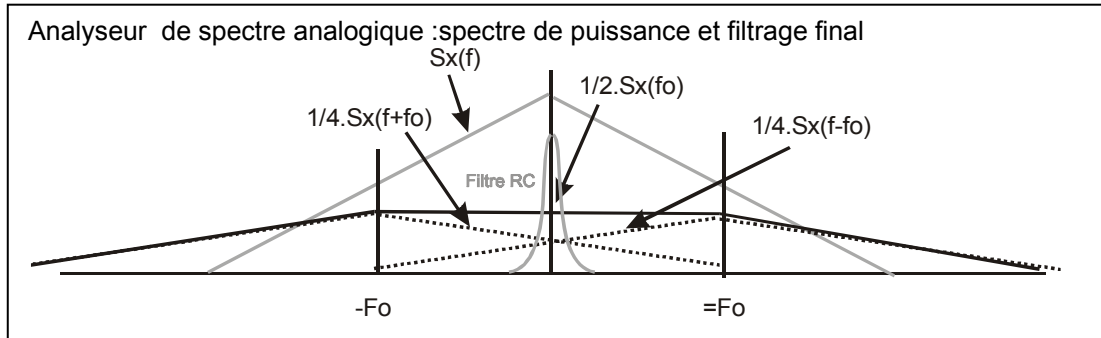
Le filtre RC effectue un filtrage fort sur la DSP à l'origine. La puissance en sortie du filtre est donc

$$P = \frac{S_X(f_0)}{4RC}$$

encore faut il faire intervenir un quadrateur pour obtenir une tension continue et un bruit résiduel .



La valeur obtenue n'est qu'un point sur le spectre, il faut recommencer pour une nouvelle valeur de f_0 , en pratique cette fréquence varie lentement mais la constante de temps RC doit alors être faible et l'erreur sur le résultat est importante .



Il existe de nombreux analyseurs de spectre bâtis sur ce principe , ils travaillent le plus souvent avec des signaux d'entrée de fréquences élevées , de 100Mhz à plusieurs GHz. A ces fréquences la numérisation des signaux est en effet difficile.

La transformée de Fourier discrète

Le signal $x(t)$ est échantillonné puis numérisé. Nous ne disposons alors que d'un nombre N fini d'échantillons. On notera que le signal d'entrée est toujours limité dans le temps, la transformation est effectuée sur un tableau de nombre, le signal est donc toujours déterministe.

Dans ces conditions l'intégrale continue de la transformation de Fourier ne peut être remplacée que par une sommation discrète :

$$X(j2\pi f) \approx \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \exp(-j2\pi f k T_e)$$

On a vu dans le cours qu'un signal dont le spectre est limité à $\pm fc$ pouvait être parfaitement reconstruit sans perte d'information à partir de $2fc$ «échantillons par seconde», prélevés à des instants régulièrement espacés, $t = k \cdot \frac{1}{2fc}$

En permutant les variables t et f la même démonstration montrerait que **la transformée de Fourier d'un signal de durée T peut être calculée exactement pour toute valeur de f à partir des seules valeurs du spectre pour les fréquences multiples de $1/T$.**

$$X(j2\pi f) = \sum_n X(j2\pi \frac{n}{T}) \frac{\sin \pi T(f - \frac{n}{T})}{\pi T(f - \frac{n}{T})} \quad \text{formule de l'interpolateur idéal.}$$

Il en découle qu'il suffit de calculer N points du spectre

Fonction de filtrage de la Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Nous calculerons donc $X(j2\pi n/T)$, noté $X(n)$ avec :

$$T = kT_e = kT/N$$

$$\text{Soit } X(n) = \sum_1^{N-1} x(kT_e) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N})$$

Mais pour $f=0$ $X(0) = \sum x(kT_e)$ si le signal est une tension continue d'amplitude 1 cette composante doit être égale à 1, ce qui impose de diviser par N . La formule exacte est donc :

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N})$$

Mais $x(t=kT_e) = [x(t) \otimes \delta(t+kT_e)]_{t=0} = [x(t+kT_e)]_{t=0}$

On peut mettre la formule sous la forme :

$$X(n) = \frac{1}{N} \left\{ x(t) \otimes \sum_k \delta(t+kT_e) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N}) \right\}_{t=0}$$

C'est la valeur à l'instant 0 du signal de sortie d'un filtre recevant à son entrée le signal x et dont la réponse impulsionnelle est une distribution

$$D_n(t) = \frac{1}{N} \sum_k \delta(t+kT_e) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N})$$

on dit que ce filtre remplit la fonction de filtrage de la TFD.

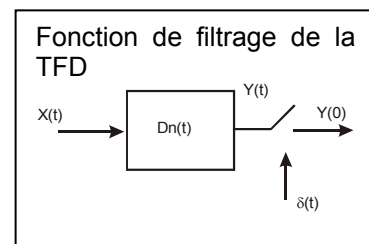
Calculons sa fonction de transfert :

$$\delta(t+kT_e) \rightarrow \exp(j2\pi f k T_e)$$

donc :

$$D_n(j2\pi f) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp[j2\pi f k T_e (f - \frac{n}{NT_e})]^k$$

c'est une suite géométrique de N termes et de raison :



$$r = \exp\left[j2\pi Te\left(f - \frac{n}{NTe}\right)\right]$$

donc de somme $\left(\frac{1-r^N}{1-r}\right)$:

$$D_n(j2\pi f) = \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j2\pi NTe(f - \frac{n}{NTe}))}{1 - \exp(j2\pi Te(f - \frac{n}{NTe}))}$$

dont on peut faire apparaître module et phase en mettant en facteur :

au numérateur $\exp(j\pi nTe(f - \frac{n}{NTe}))$ et au dénominateur $\exp(j\pi Te(f - \frac{n}{NTe}))$

Il vient alors

$$D_n(f) = \frac{1}{N} \exp[j\pi(N-1)Te(f - \frac{n}{Te})] \cdot \frac{\sin \pi NTe(f - \frac{n}{NTe})}{\sin \pi Te(f - \frac{n}{NTe})}$$

en introduisant :

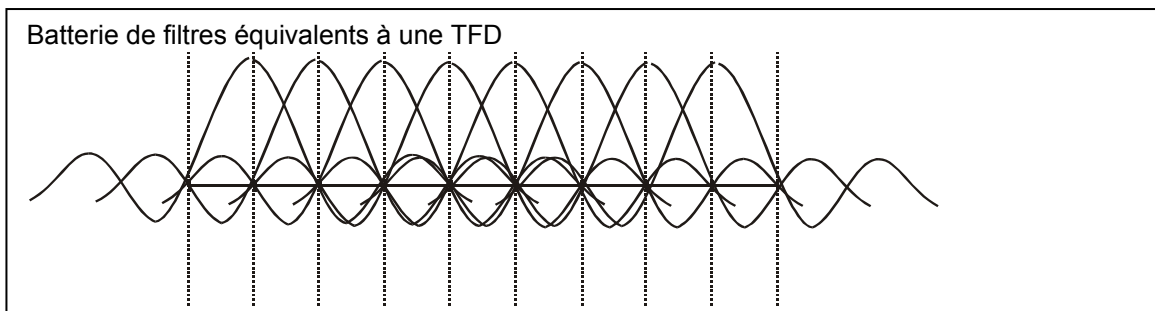
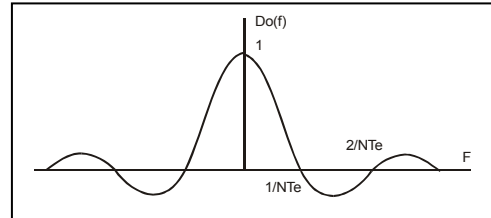
$$D_0(f) = \frac{1}{N} \exp(j2\pi(N-1)fTe) \frac{\sin \pi NfTe}{\sin \pi fTe}$$

alors

$$D_n(f) = D_0\left(f - \frac{n}{NTe}\right) = D_0\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Le module ressemble à un sinus cardinal, il s'annule pour toutes les fréquences multiples de $1/T$ c'est à dire précisément celles pour lesquelles on calcule la TFD

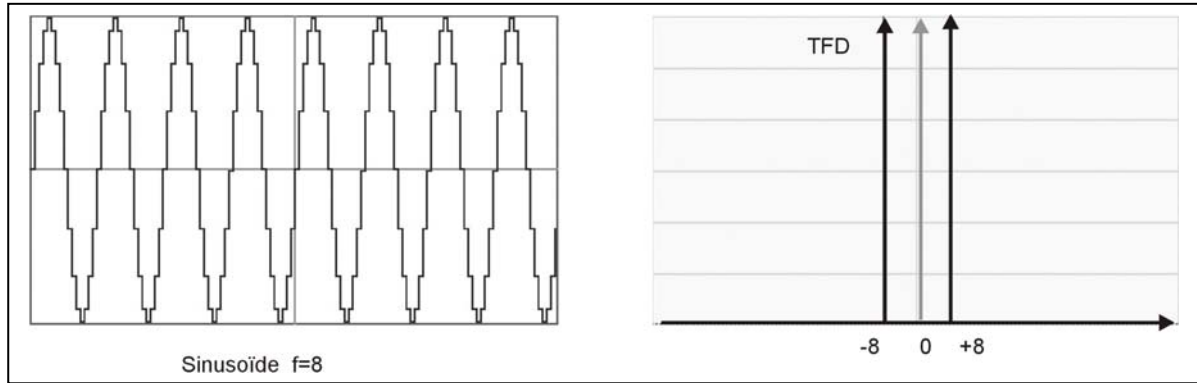
L'ensemble des N valeurs du spectre est donc obtenu en utilisant une batterie de N filtres centrés sur les fréquences multiples de $1/T$. On notera que pour chacune de ces fréquences un seul filtre intervient, les contributions des autres étant nulles.



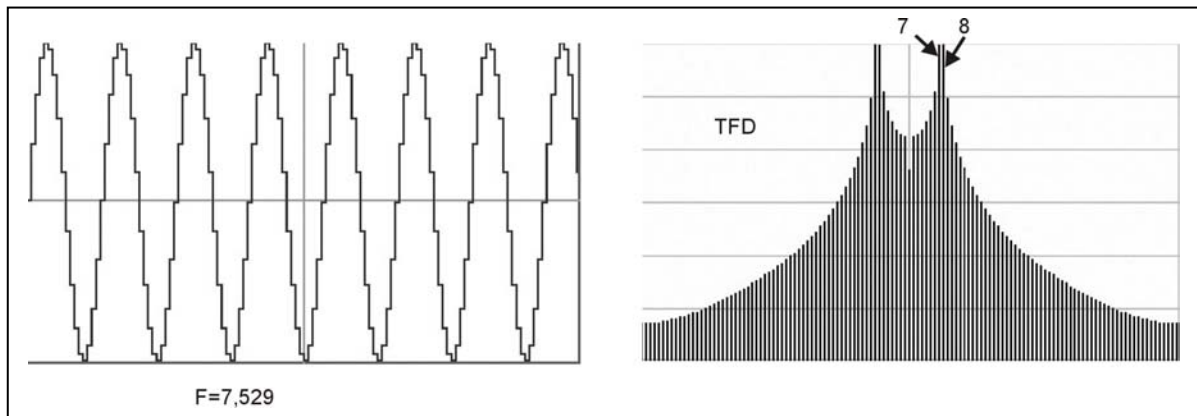
Conséquences :

Si le signal étudié est périodique de période T son spectre est constitué de raies situées à des fréquences multiples de $1/T$, il n'y a aucune interférence entre les divers filtres et le spectre obtenu

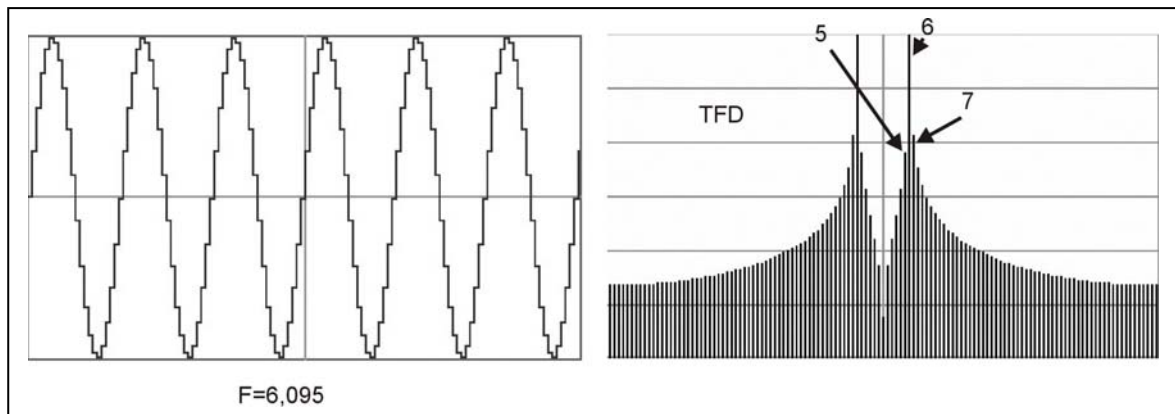
a bien la forme attendue. La figure ci dessous représente par exemple une sinusoïde de période $16Te$ cadrée dans une fenêtre de 128 points, la fréquence relative est $128/16=8$ et le résultat obtenu est bien une raie unique pour cette valeur.



Si au contraire le signal d'entrée a des composantes spectrales qui ne sont pas des multiples de $1/T$ tous les filtres contribuent simultanément et le spectre s'élargit considérablement. La figure ci dessous montre ce qui se passe pour un signal de période 17 (dans la fenêtre de durée $T=128$ points). Sa fréquence est $128/17=7,529$, on constate en effet que les raies les plus intenses sont celles dont les fréquences sont 7 et 8, mais les raies parasites 6 et 9 sont à peine à -10dB



Un résultat tout a fait semblable est obtenu pour une sinusoïde de période 21 (fréquence $128/21=6,09$). La raie 6 est bien dominante mais les deux voisines sont seulement à -20dB .



Méthode des fenêtres de pondération

L'étalement du spectre observé ci dessus est une conséquence de la limitation temporelle du signal d'entrée. Le spectre obtenu n'est pas celui du signal $x(t)$ défini de $-\infty$ à $+\infty$ mais celui d'un signal limité :

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_T(t)$$

dont la transformée est le produit de convolution :

$$X(j2\pi f) \otimes \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

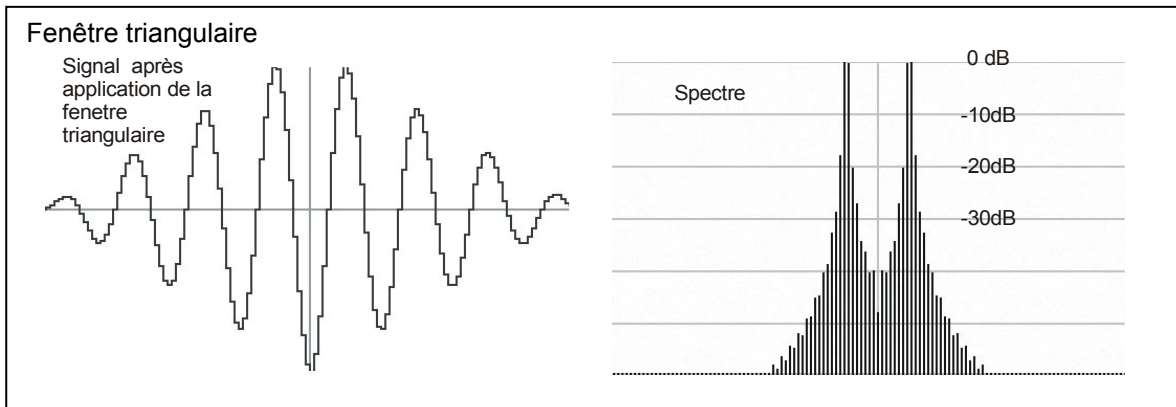
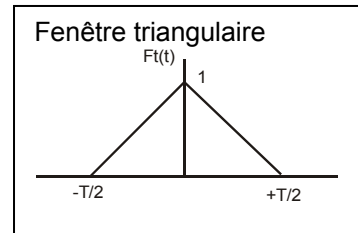
Ce produit de convolution est à l'origine des raies parasites observées. On dit dans ce cas que l'on a utilisé une fenêtre rectangulaire

La méthode des fenêtres consiste à mettre en œuvre une fonction fenêtre limitée dans le temps. Le signal tronqué est $x(t) \cdot f_T(t)$ et sa transformée $X(j2\pi f) \otimes F_T(j2\pi f)$ elle ne peut être identique à X que si F est un Dirac ce qui correspond à une fenêtre de durée infinie. Il faut rechercher une fenêtre de durée T qui introduise le moins de perturbations possibles. Le résultat est d'autant plus satisfaisant que le spectre de f se limite à un lobe central (de largeur $\pm 1/T$). De nombreuses fenêtres de pondération ont été proposées, aucune n'est parfaite.

La plus simple est la fenêtre triangulaire représentée ci contre. Appliquée au signal de période 17 ($f=7,529$) rencontré plus haut le résultat est représenté sur la figure ci dessous.

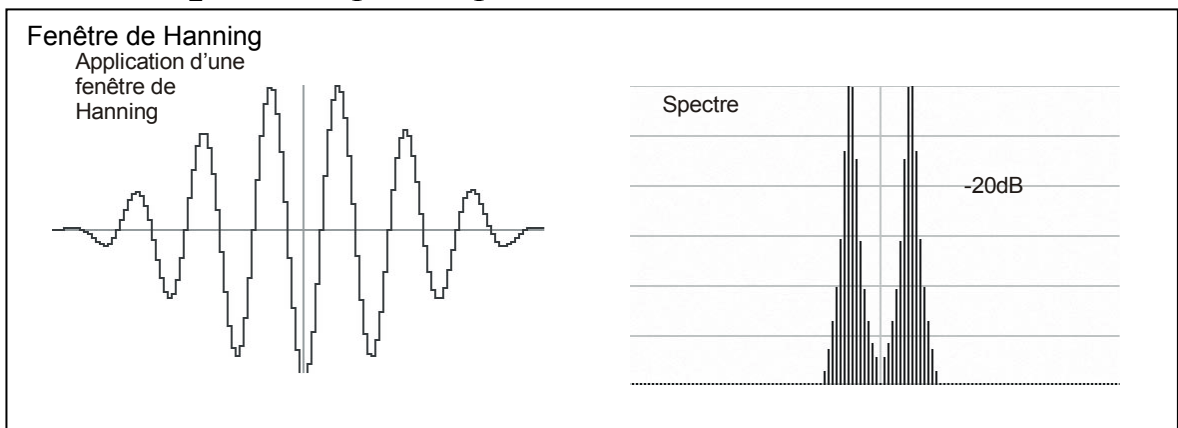
La fréquence étant proche de 7,5 les deux raies 7 et 8 sont dominantes mais les voisines sont rejetées à -20dB au lieu de 10 et les autres ont un niveau qui chute rapidement.

(comparer avec la figure présentant le résultat sans fenêtre)



Parmi les nombreuses fenêtres proposées nous citerons celle de Hanning

$$f_{HNT}(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi \frac{t}{T}) \cdot \text{rect}_T(\frac{t}{T}) \text{ qui donne le résultat suivant.}$$



Les raies latérales 6 et 9 ne sont pas plus atténuées mais l'amplitude des autres chute plus vite. Le résultat est encore meilleur avec la fenêtre de Hamming :

$$f_{Hamming} = \left[0,54 - 0,46 \cos 2\pi \frac{t}{T} \right] \text{rect}_T(\frac{t}{T})$$

La transformation de Fourier rapide (FFT)

Le calcul de la TFD $X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N})$ nécessite N^2

multiplications complexes, ce nombre devient rapidement très grand dès que le nombre de points du fichier d'entrée augmente . Pour 1000 points il faut déjà 1000000 multiplications complexes et si chacune d'elle dure 10µS , le spectre n'est obtenu qu'au bout de 10 secondes. Avec un microprocesseur de base pour lequel une multiplication prend plus de 1mS , c'est presque une heure que dure le traitement .

Ce long temps de calcul a longtemps limité la diffusion de la transformation de Fourier , elle a au contraire littéralement explosé lorsque Cooley à montré qu'en organisant convenablement les opérations on pouvait accélérer considérablement le traitement.

Dans ce qui suit nous négligerons la division par N qui peut être effectuée à la fin .

Posons $W_N = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$

Il faut alors calculer : $X(n) = \sum_0^{N-1} x(k).W_N^{nk}$

Mais les W sont les racines N ièmes de l'unité . Si N est une puissance entière de 2 :

$$W_N^N = 1 \quad W_N^K = -W_N^{K+\frac{N}{2}} = W_N^{K+AN} \quad A \text{ entier et } W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$$

Partageons la suite des x(n) en deux suites contenant respectivement les termes de rang pair et impair, puis isolons dans le calcul global les termes provenant de ces deux suites.

$$X(n) = \left\{ \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i)W_N^{2in} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1).W_N^{(2i+1)n} \right\}$$

mais $W_N^2 = W_{N/2}$ alors

$$X(n) = \left\{ \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i).W_{N/2}^{in} + W_N^n \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1).W_{N/2}^{in} \right\}$$

Le premier terme est la transformée de Fourier de la suite des N/2 termes de rang pair et le second celle des termes de rang impair. Tout repose sur cette remarque .

Plaçons nous dans le cas N=8 .Il y a 8 valeurs d'entrée x(0) à x(7) organisées en 2 listes

Liste paire x(0) x(2) x(4) x(6)

Liste impaire x(1) x(3) x(5) x(7)

Si l'on sait effectuer une transformation d'ordre 4 sur ces deux listes le résultat est acquis. Soient X₁(0) X₁(1) X₁(2) X₁(3) les termes obtenus à partir de la liste paire et X₂(0) X₂(1) X₂(2) X₂(3) ceux provenant de la liste impaire .

Mais d'après la formule précédente , pour le second terme :

$$X(2) = \sum_0^3 x(2i)W_4^{2i} + W_8^2 \sum_0^3 x(2i+1)W_4^{2i}$$

c'est à dire : $X(2) = X_1(2) + W_8^2 X_2(2)$

Pour le 6eme terme : $X(6) = \sum_0^3 x(2i).W_4^{6i} + W_8^6 \sum_0^3 x(2i+1).W_4^{6i}$

mais $W_4^{6i} = W_4^{2i}$ et $W_8^6 = -W_8^2$

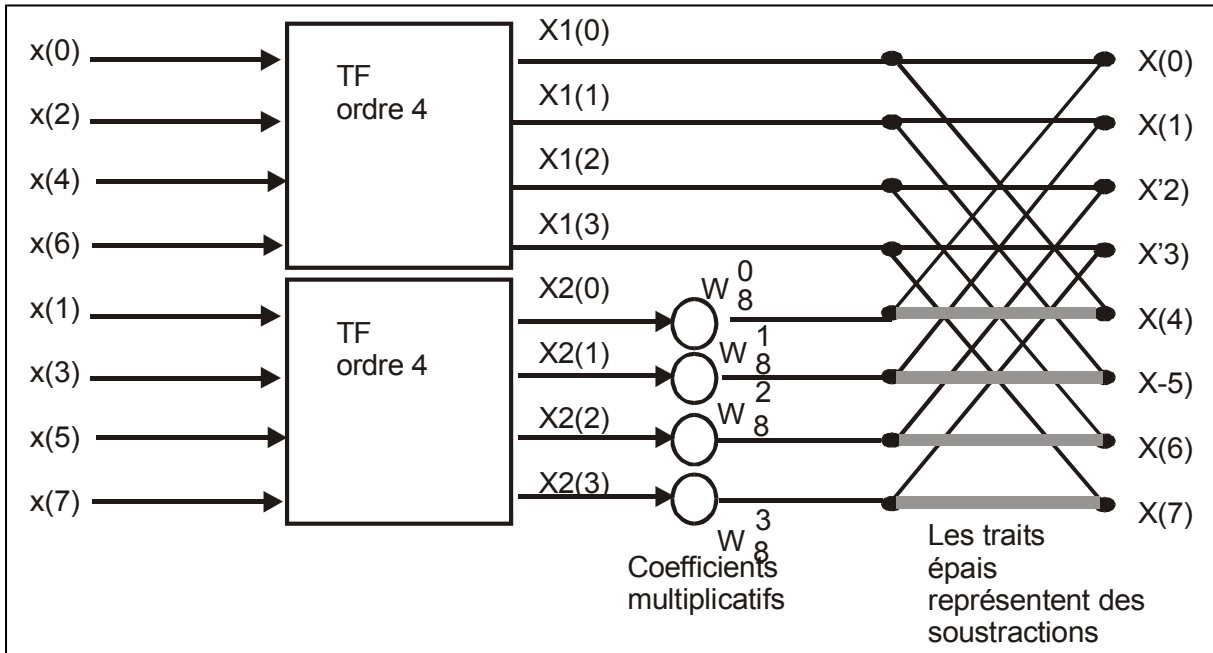
Soit :

$$X(6) = \sum_0^3 x(2i)W_4^{2i} - W_8^2 \sum_0^3 x(2i+1)W_4^{2i}$$

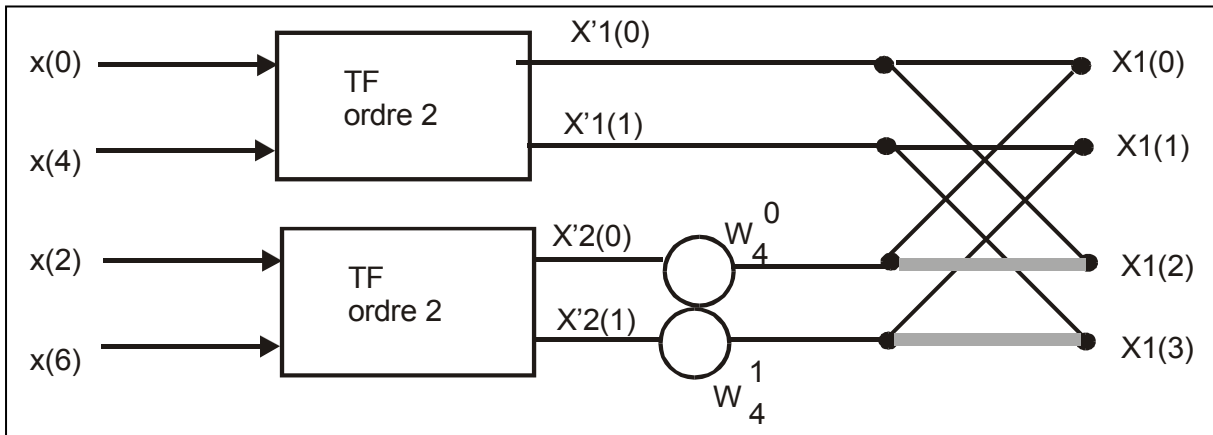
c'est à dire :

$$X(6) = X_1(2) - W_8^2 X_2(2)$$

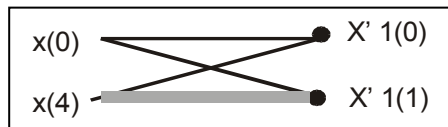
un seul signe a changé en passant de $X(2)$ à $X(6)$.
 Si l'on sait effectuer une transformation sur une liste de 4 termes, le résultat sur une liste de 8 est obtenu par le processus dont le graph est reproduit ci dessous .



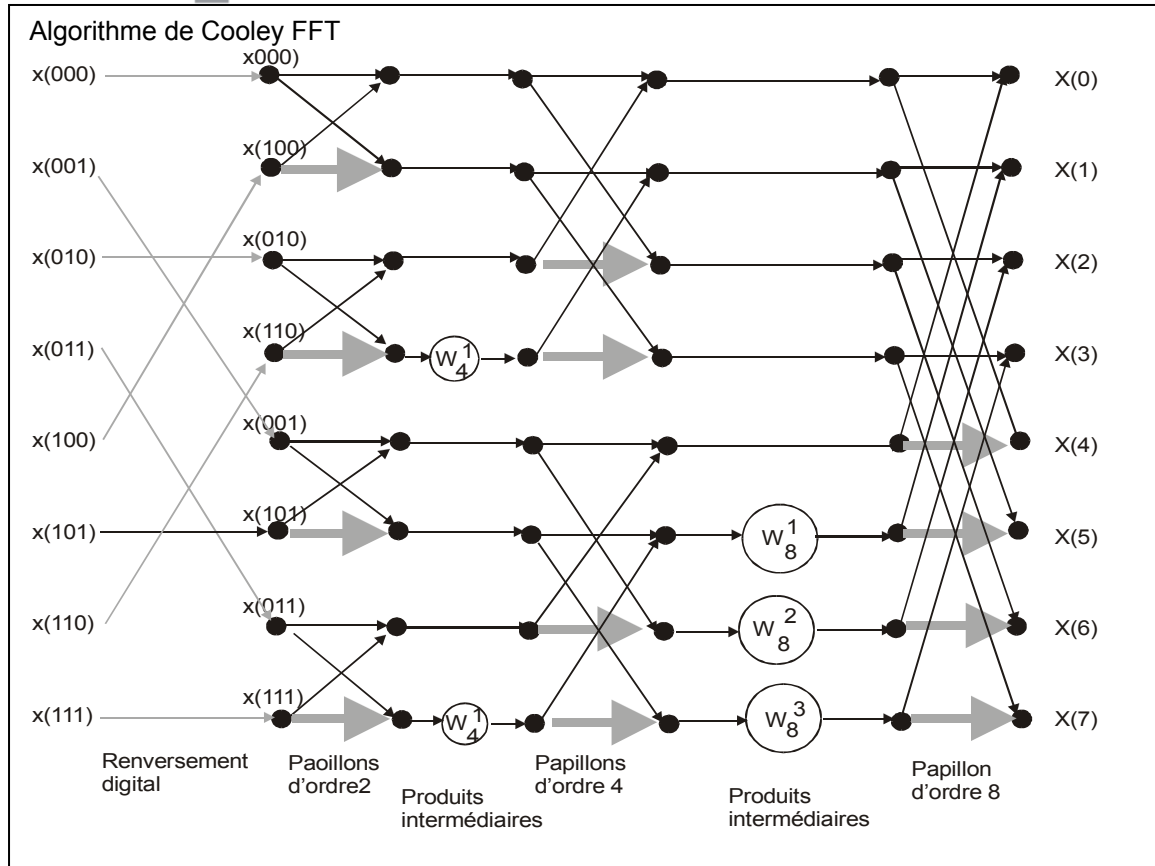
Ceci suppose que l'on sache effectuer les transformations d'ordre 4 . Or il est bien évident que l'on retrouve pour ces dernières les mêmes propriétés soit



La transformée d'ordre 2 est particulièrement simple.
 En regroupant ces graphs on obtient l'algorithme de Cooley , c'est la transformation de Fourier rapide ou FFT .
 Elle est rapide en effet le nombre d'opérations est de l'ordre de $N \cdot \log_2(N)$. Pour 1024 points il faut environ 10000 opérations , 100 fois moins qu'avec la méthode directe .



Pour organiser les listes de termes pairs et impairs la première opération est un renversement digital, elle consiste à placer les termes dans l'ordre obtenu en renversant leur numéro codé en binaire .



Ne pas oublier la division par N pour terminer le calcul .

T F D et convolution discrète

La relation la plus importante reliant transformée de Fourier et le produit de convolution est :

$$\mathfrak{T}(x.y) = X \otimes Y$$

ce résultat ne subsiste pas avec la TFD sauf si l'on utilise la convolution cyclique.

$$x(k) \otimes y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k).y[(k - n) \text{ modulo } N]$$

En effectuant la FFT du produit il vient :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^{N-1} x(r).y(k - r) \right] \exp(-j2\pi \frac{kn}{N})$$

en écrivant :

$$\exp(-j2\pi \frac{nk}{N}) = \exp(-j2\pi \frac{rN}{N}) \exp(-j2\pi \frac{(k - r)n}{N})$$

il vient :

$$\sum_{r=0}^{N-1} x(r) \exp(-j2\pi \frac{rn}{N}) \sum_{k=0}^{N-1} y(k - r) \exp(-j2\pi \frac{(k - r)n}{N})$$

Le premier terme est la TFD de x , pour le second lorsque k varie de 0 à N-1 k-r varie de -r à N-1-r , mais y(-r)=y(N-r) si bien sûr le signal d'entrée est périodique . On retrouve les mêmes termes mais rangés dans un ordre différent . Le second terme est donc la TFD de la suite y .C'est bien le résultat recherché .

II ALGORITHME DE TRANSFORMATION DE WALSH

Le signal d'origine est constitué de $N=2^p$ points contenus dans le tableau $X[n]$ $n=0\dots N-1$

Le signe \wedge indique une élévation de puissance

L'algorithme est le suivant :

Renversement digital

```

J=1
For l=1 to N-1 do
  If j>=1 then    XX=X(j-1)
                  X(j-1)=X(l-1)
                  X(l-1)=XX
  L=N/2
  Tant que J>L then
    J=J-L
    L=L/2
  J=J+L

```

Calcul des papillons de Walsh

```

For T=0 to P-1 do
  TR=2^(P-T)
  NT=2^T
  For J=0 to (NT-1) do
    IO=J*TR
    For K=0 to (TR/2-1) do
      X(IO+K)=X(IO+K)+X(IO+K+TR/2)
      X(IO+K+TR/2)=X(IO+K)-2*X(IO+K+TR/2)
    IF TR>2 then
      INV=TR-TR/4
      FOR K=INV to TR-1 do
        X(IO+K)=-X(IO+K)

```

A coder dans le langage de votre choix

III DEMONSTRATION DU THEOREME DE PRICE

Le signal d'entrée du système non linéaire indépendant du temps est gaussien .

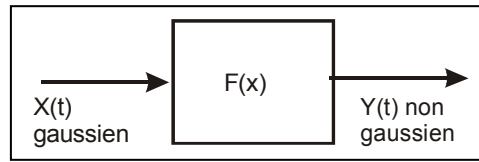
La fonction d'autocorrélation de y s'écrit

$$R_Y(\tau) = \overline{y(t)y(t-\tau)} = E[y(t)y(t-\tau)]$$

posons $x_1=x(t)$ $x_2=x(t-\tau)$ et $y_1=f(x_1)$ $y_2=f(x_2)$

alors :

$$R_Y(\tau) = E[f(x_1)f(x_2)]$$



C'est à dire , en utilisant la densité de probabilité à 2 dimensions :

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)p(x_1x_2)dx_1dx_2$$

mais pour une gaussienne :

$$p(x_1x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_X^2(0) - R_X^2(\tau)}} \cdot \exp\left[-\frac{R_X(0).(x_1^2 - x_2^2) + 2R_X(\tau)x_1x_2}{2(R_X^2(0) - R_X^2(\tau))}\right]$$

à laquelle correspond une fonction caractéristique à 2 dimensions (voir démonstrations dans les ouvrages de probabilités) :

$$E[\exp[j(ux_1 + vx_2)]] = \iint p(x_1x_2) \exp[j(ux_1 + vx_2)]dx_1dx_2 = \exp\left[-\frac{1}{2}R_X(0)[u^2 + v^2] - R_X(\tau)uv\right]$$

Si f(x) possède une transformée de Fourier : (ainsi que v)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot \exp(j2\pi ux)du$$

Alors :

$$R_Y(\tau) = \iiint F(u) \exp[j2\pi ux_1] du \int F(v) \exp[j2\pi vx_2] dv \cdot p(x_1x_2) dx_1 dx_2$$

En posant $u'=2\pi u$ $v'=2\pi v$ il vient :

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint F(u') \exp(ju'x_1) du' \int F(v') \exp(jv'x_2) dv' \cdot p(x_1x_2) dx_1 dx_2$$

soit :

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(u')F(v') \iint p(x_1x_2) \exp[j(u'x_1 + v'x_2)] dx_1 dx_2 du' dv'$$

mais l'intégrale intérieure est $\varphi_X(u'v')$ fonction caractéristique à 2 dimensions. Si on la remplace par son expression citée plus haut il vient :

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(u')F(v') \exp\left[-\frac{1}{2}R_X(0)(u'^2 + v'^2) - R_X(\tau)u'v'\right] du' dv'$$

ou en revenant à u et v

$$R_Y(\tau) = \iint F(u)F(v) \exp\left[-\frac{1}{2}R_X(0)4\pi^2(u^2 + v^2) - 4\pi^2R_X(\tau)uv\right] dudv$$

Prenons maintenant sa dérivée k ième par rapport à Rx

$$\frac{\partial^k R_Y}{\partial R_X^k} = \iint F(u)F(v) \exp\left[-\frac{1}{2}R_X(0)4\pi^2(u^2 + v^2) - 4\pi^2R_X(\tau)uv\right] (-4\pi^2)^k u^k v^k dudv$$

mais on reconnaît

$$\varphi_X(2\pi u, 2\pi v) = E[\exp(j2\pi ux_1) \cdot \exp(j2\pi vx_2)]$$

la dérivée s'écrit donc :

$$\frac{\partial^k R_Y}{\partial R_X^k} = E\left[\iint F(u)F(v) \exp[j2\pi(ux_1 + vx_2)] (-4\pi^2)^k u^k v^k dudv\right]$$

mais

$$(-4\pi^2)^k = (2\pi j)^{2k}$$

soit
$$: \frac{\partial^k R_Y}{\partial R_X^k} = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(u) (j2\pi u)^k \exp(j2\pi u x_1) du \int_{-\infty}^{\infty} F(v) (j2\pi v)^k \exp(j2\pi v) dv \right]$$

mais si $F(u)$ est la transformée de $f(x)$ $[2\pi j u]^k \cdot F(u)$ est la transformée de la dérivée kième $f^{(k)}(x)$. l'expression précédente prend alors la forme :

$$\frac{\partial^K R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)^K} = E[f^{(k)}[x(t)].f^{(K)}[x(t - \tau)]]$$

C'est le théorème de Price présenté dans le cours

Il existe un théorème analogue pour l'intercorrélation :

Si
$$y_1(t) = f_1[x_1(t)] \quad \text{et} \quad y_2(t) = f_2[x_2(t)]$$

Alors :

$$\frac{\partial^K R_{Y_1 Y_2}(\tau)}{\partial R_{X_1 X_2}(\tau)^K} = E[f_1^{(K)}[x_1(t)].f_2^{(K)}[x_2(t - \tau)]]$$

qui se démontre de façon semblable .